

第3章

自然率とギャップ

村澤 康友（大阪府立大学）

1 はじめに

マクロ経済学の新しい新古典派総合（new neoclassical synthesis）においては、伸縮的な価格・賃金の下でのマクロ経済変数の均衡値を**自然率**、価格・賃金の硬直性によって生じる実際の値と自然率との差を**ギャップ**と定義する（Woodford [2003, pp. 8–9]）。硬直的な価格・賃金の下での物価水準の変動は、相対価格を歪ませ、市場の資源配分を非効率にする。そのため物価の安定は中央銀行の第1の政策目標とされる。将来の物価・インフレ率は現在のギャップに依存する。したがって中央銀行は両者を注視して金融政策を運営する（例えばテーラー・ルール）。ただしギャップは観測されないので推定が必要となる。

本章では Beveridge and Nelson [1981] の手法を拡張した**ベイジアン多変量 Beveridge–Nelson (B–N) 分解**を用いて日本の自然率／ギャップを推定する。B–N 分解・多変量分析・ベイズ推測の利点は以下の通りである。

本稿の作成にあたり、2006年9月24–26日に開催されたコンファレンス「日本経済はどのように機能しているか」の参加者から有益なコメントを頂いた。ここに記して感謝する。

1. 数量が伸縮的なら自然率＝定常均衡となる．外的ショックがなければ価格・数量調整にともない実際の値は定常均衡に収束する．したがって B-N 分解のトレンド＝自然率，サイクル＝ギャップと解釈できる．*¹
2. 最も単純な金融マクロ・モデルは産出量・インフレ率・実質利子率の3変数で構成される（Woodford [2003]）．これら3変数の自然率／ギャップを同時推定する方が個別に推定するより効率的である（本稿では失業率も加えて4変数とする）．
3. 点推定だけでなく推定誤差の評価も重要である．ベイズ推測ならシミュレーションで容易かつ正確に自然率／ギャップの事後分布が得られる．

ベイジアン多変量 B-N 分解を用いて Murasawa [2006] はアメリカの自然率／ギャップを推定した．本稿では 93SNA の GDP が利用できる 1980 年以降の日本の自然率／ギャップを推定する．結果の要約は以下の通りである．

- 自然率／ギャップの推定誤差は非常に大きい．68SNA の GDP も利用して標本期間を延ばす，信頼できる事前情報を取り入れるなどの対処も可能だが，基本的に日本の自然率／ギャップの点推定値の信頼性は低いと認識すべきである．*²
- ギャップの符号に関する情報は得られる．ギャップの事後分布から正のギャップの事後確率を計算できる．この確率指数を金融政策の運営に役立てることは可能である．
- 産出ギャップの点推定値は最大で 5 % 程度，失業率ギャップの点推定値は最大で 1 % ポイント程度である．アメリカと比較して日本の失業率ギャップは非常に小さい．
- 自然率の点推定値の変動は，産出量・失業率では実際の値の変動より大きく，インフレ率・実質利子率では実際の値の変動より小さい．前者は

*¹ 数量が硬直的なら自然率≠定常均衡となる．この場合は数量の硬直性をモデル化して構造的に自然率／ギャップを推定する方が望ましい．時系列分析による推定では自然率＝定常均衡と（暗黙に）定義することが多い．

*² 本稿は最終データを用いている．Orphanides and van Norden [2002] や小巻 [2003] はリアルタイム・データによる GDP ギャップの推定値の信頼性を問題視している．

アメリカの自然率には見られない特徴である。

- 景気基準日付と比較して、産出量・失業率の自然率は procyclical, ギャップは countercyclical である。後者は自然率の過度な変動の結果である。
- フィリップス曲線とオークンの法則は概ね成立する。

なお本稿では省略するが、68SNA の GDP を用いて 1960～2000 年の自然率／ギャップを推定しても同様の結果が得られる。

自然率の過度な変動は必ずしも定義と矛盾しない。硬直性は実際の値の変動を小さくする。したがって価格（数量）が硬直的なら価格（数量）の自然率の変動は相対的に大きくなる。日本の失業率は非常に硬直的と言われている。アメリカと異なり日本では数量の硬直性が支配的であるというのが本稿の結果の 1 つの解釈である。これは結果的に自然率≠定常均衡であることを意味する。

ただし VAR モデルに基づく本稿の結果はベンチマークに過ぎない。B-N 分解の結果は変数の仮定に依存する。例えば B-N 分解のトレンドは変数が $I(1)$ なら変動するが、 $I(0)$ なら一定となり、 $I(2)$ なら存在しない。また本稿は構造変化の可能性を無視している。政策ルールが変われば誘導形モデルのパラメーターは変化する（ルーカスの批判）。非線形モデルでは B-N 分解の存在は自明でないが、今後はスイッチング・モデルや可変パラメーター・モデルへの拡張が必要であろう。

本章の構成は以下の通りである。まず第 2 節で自然率の概念を整理し、次に第 3 節で先行研究を概観する。続いて第 4 節で多変量 B-N 分解の要点を解説し、第 5 節で日本の自然率／ギャップを推定する。最後に第 6 節でまとめと今後の課題を述べる。ベイズ推測の手順は補論で説明する。

2 自然率とは

伸縮的な価格・賃金の下での均衡産出量を**自然産出量**という。生産要素の完全利用の下での産出量（GDP）を**潜在産出量（GDP）**という。価格・賃金が調整すれば生産要素の供給量も変化するので、厳密には両者は同義でない。ただし生産要素の数量が硬直的なら両者の値は近くなる。

伸縮的な価格・賃金の下での均衡インフレ率を**自然インフレ率**という。インフレ率の基調（中・長期予測）を**コア・インフレ率**という。Cogley [2002] はインフレ率の B-N 分解のトレンドをコア・インフレ率と解釈している。食料・エネルギーを除く CPI の上昇率を**コア CPI インフレ率**という。食料・エネルギーのインフレ率の変化が一時的とは限らないので、自然インフレ率とコア CPI インフレ率は同義でない。

伸縮的な価格・賃金の下での均衡実質利子率を**自然利子率**という。これは 19 世紀末にヴィクセルが提唱した概念である。自然率の概念は自然利子率に由来する。

伸縮的な価格・賃金の下での均衡失業率を**自然失業率**という。これは自然利子率に倣ってフリードマンが提唱した概念である。自然インフレ率の下での失業率と言ってもよい。インフレを加速しない失業率を **NAIRU (Non-Accelerating Inflation Rate of Unemployment)** という。前期のインフレ率が自然インフレ率とは限らないので、厳密には両者は同義でない。

3 先行研究

産出量・インフレ率・実質利子率・失業率の自然率／ギャップを個別に推定した研究は膨大にあるが、同時推定を行った例は少ない。^{*3} Apel and Jansson [1999a,b], Basistha and Startz [2004], King and Morley [2006] は産出量と失業率, Laubach and Williams [2003] は産出量と実質利子率, Doménech and Gómez [2006] は産出量・インフレ率・失業率の自然率を同時推定しているが、いずれも最も単純な金融マクロ・モデルを構成する産出量・インフレ率・実質利子率の少なくとも 1 つを欠いており、システム推定として不完全である。

1 変量・多変量を問わず、最近では unobserved components (UC) モデルを仮定して、ランダム・ウォークのトレンド（自然率）と I(0) のサイクル（ギャップ）をカルマン・フィルターで推定する方法が主流である。上記の先行研究で

^{*3} 本節に限り潜在産出量 (GDP), コア・インフレ率, NAIRU も自然率と呼ぶ。

も King and Morley [2006] が多変量 B–N 分解を用いている他は、いずれも UC モデルを仮定している。自然率／ギャップの推定誤差の評価にカルマン・フィルターは便利であるが、変数が増えるとパラメーターの最尤推定が困難になる。

ベイズ推測なら B–N 分解でも自然率／ギャップの推定誤差の評価は容易である。ベイジアン多変量 B–N 分解の応用例に Cogley and Sargent [2001, 2005] がある。ただし彼らはインフレ動学の「進化」の分析のために可変パラメーター VAR モデルを用いている。本稿では自然率／ギャップの推定が目的なので固定パラメーター VAR モデルを用いる。

複数の自然率／ギャップを同時推定した日本の先行研究は見当たらない。個別の推定でも推定誤差を評価した例は少ない。自然産出量（インフレを加速しない生産量）の推定誤差を、廣瀬・鎌田 [2002] はカルマン・フィルターで、鎌田・廣瀬 [2003] はブートストラップ法で評価している。ベイズ推測の応用例は見当たらない。そもそも日本では生産関数に基づく潜在 GDP / GDP ギャップの推定が依然として主流であり、時系列分析で自然率／ギャップを推定した例は少ない。

4 多変量 Beveridge–Nelson 分解

本節では多変量 B–N 分解の要点を解説する。 $\{\mathbf{y}_t\}$ をドリフト $\boldsymbol{\mu}$ の N 変量 $I(1)$ 過程とする。 \mathbf{y}_t の（非確率的なトレンドを除いた）無限期先予測値を \mathbf{y}_t のトレンド（永続的）成分という。すなわち

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_t^* &:= \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{E}_t(\mathbf{y}_{t+T} - T\boldsymbol{\mu}) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{E}_t \left(\mathbf{y}_t + \sum_{s=1}^T (\Delta \mathbf{y}_{t+s} - \boldsymbol{\mu}) \right) \\ &= \mathbf{y}_t + \sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{E}_t(\Delta \mathbf{y}_{t+s} - \boldsymbol{\mu}). \end{aligned} \quad (3.1)$$

実際の値とトレンド成分の差を**サイクル（一時的）成分**という。すなわち

$$\begin{aligned} c_t &:= \mathbf{y}_t - \mathbf{y}_t^* \\ &= - \sum_{s=1}^{\infty} E_t(\Delta \mathbf{y}_{t+s} - \boldsymbol{\mu}). \end{aligned} \quad (3.2)$$

$\{c_t\}$ が求まれば $\{\mathbf{y}_t^*\}$ も求まるので、以下では $\{c_t\}$ の推定を考える。

Morley [2002] は B-N 分解を次のように整理した。 $\{\Delta \mathbf{y}_t\}$ に線形状態空間モデルを仮定する。

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_t &= \mathbf{A}\mathbf{s}_{t-1} + \mathbf{B}\mathbf{z}_t, \\ \Delta \mathbf{y}_t &= \boldsymbol{\mu} + \mathbf{C}\mathbf{s}_t + \mathbf{D}\mathbf{z}_t, \\ \{\mathbf{z}_t\} &\sim \text{WN}(\mathbf{I}). \end{aligned}$$

\mathbf{A} のすべての固有値が絶対値で 1 未満なら、

$$\begin{aligned} c_t &= - \sum_{s=1}^{\infty} E_t(\mathbf{C}\mathbf{s}_{t+s} + \mathbf{D}\mathbf{z}_{t+s}) \\ &= -\mathbf{C} \sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{A}^s \mathbf{s}_{t|t} \\ &= -\mathbf{C}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}\mathbf{s}_{t|t}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

すなわち c_t は状態ベクトルの更新推定値 $\mathbf{s}_{t|t}$ の線形関数となる。

$\{\Delta \mathbf{y}_t\}$ が VAR 過程なら $\{\mathbf{s}_t\}$ が観測されるので B-N 分解はもっと簡単になる。 $\{\Delta \mathbf{y}_t\}$ に次の VAR(p) モデルを仮定する。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi}(L)(\Delta \mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}) &= \mathbf{w}_t, \\ \{\mathbf{w}_t\} &\sim \text{WN}(\boldsymbol{\Sigma}). \end{aligned}$$

状態ベクトルを次のように定義する。

$$\mathbf{s}_t := \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu} \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{y}_{t-p+1} - \boldsymbol{\mu} \end{pmatrix}.$$

μ を所与として s_t は観測できる．状態空間表現は

$$\begin{aligned} s_t &= \mathbf{A}s_{t-1} + \mathbf{B}z_t, \\ \Delta \mathbf{y}_t &= \boldsymbol{\mu} + \mathbf{C}s_t, \\ \{z_t\} &\sim \text{WN}(\mathbf{I}_N), \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &:= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_1 & \cdots & \boldsymbol{\Phi}_p \\ & \mathbf{I}_{(p-1)N} & \mathbf{O}_{(p-1)N \times N} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B} &:= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}^{1/2} \\ \mathbf{O}_{(p-1)N \times N} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C} &:= [\mathbf{I}_N \quad \mathbf{O}_{N \times (p-1)N}]. \end{aligned}$$

\mathbf{A} のすべての固有値が絶対値で 1 未満なら、

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_t &= -\mathbf{C}(\mathbf{I}_{pN} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}s_{t|t} \\ &= \mathbf{W}_1(\Delta \mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}) + \cdots + \mathbf{W}_p(\Delta \mathbf{y}_{t-p+1} - \boldsymbol{\mu}), \end{aligned} \quad (3.4)$$

ただし

$$[\mathbf{W}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{W}_p] := -\mathbf{C}(\mathbf{I}_{pN} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}.$$

s_t が観測できるのでカルマン・フィルタは不要であり、 \mathbf{c}_t は観測値 $\Delta \mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}, \dots, \Delta \mathbf{y}_{t-p+1} - \boldsymbol{\mu}$ の線形関数となる．VAR モデルの係数が既知なら \mathbf{c}_t も観測できる．したがってモデルの定式化を所与とすれば、係数の推定誤差のみが \mathbf{c}_t の推定誤差の原因となる．

5 日本の自然率とギャップ

5.1 データ

日本の自然率／ギャップの推定に使用するデータは表 3.1 の通りである．物価水準としては中央銀行が注視する消費者物価指数（CPI）を用いるべきであるが、季節調整値の長期時系列が日本では利用できないので GDP デフレーターで代用する．金利としては政策金利である翌日物コール・レートを用いる

表 3.1 使用データ

表記	系列名	出所
Y_t	実質 GDP (93SNA, 平成 7 年基準, 季調, 年率)	内閣府
P_t	GDP デフレーター (同)	内閣府
i_t	譲渡性預金平均金利 (新規発行分, 90 日以上 180 日未満, 年率)	日本銀行, 東洋経済『経済統計年鑑』
U_t	完全失業率 (季調)	総務省

先行研究が多いが, 3 ヶ月物金利の方が四半期の理論モデルと整合的なので, 本稿では長期時系列が利用しやすい譲渡性預金 (CD) 3 ヶ月物金利を用いる.

インフレ率を $\pi_t := \ln(P_t/P_{t-1})$, (事前的な) 実質利子率を $r_t := \ln(1 + i_t/4) - E_t(\pi_{t+1})$, 事後的な実質利子率を $\hat{r}_t := \ln(1 + i_t/4) - \pi_{t+1}$ と定義する. 繰り返し期待値の法則より $s \geq 0$ について

$$\begin{aligned} E_t(\hat{r}_{t+s}) &= E_t(\ln(1 + i_{t+s}/4) - \pi_{t+s+1}) \\ &= E_t(\ln(1 + i_{t+s}/4) - E_{t+s}(\pi_{t+s+1})) \\ &= E_t(r_{t+s}). \end{aligned}$$

したがって $s \geq 1$ について $E_t(\Delta \hat{r}_{t+s}) = E_t(\Delta r_{t+s})$ なので, (3.2) 式より r_t と \hat{r}_t のサイクル成分 (ギャップ) は等しい. そこで $\{\mathbf{y}_t\}$ を次のように定義する.

$$\mathbf{y}_t := \begin{pmatrix} \ln Y_t \\ \pi_t \\ \hat{r}_t \\ \ln U_t \end{pmatrix}.$$

$\{\mathbf{y}_t\}$ は I(1) と仮定する.

93SNA (平成 7 年基準) の GDP が利用できるのは 1980 年第 I 四半期～2005 年第 II 四半期である. したがって $\{\mathbf{y}_t\}$ が作成できるのは 1980 年第 II 四半期～2005 年第 I 四半期となり, $\{\Delta \mathbf{y}_t\}$ の標本期間は 1980 年第 III 四半期

表 3.2 要約統計量

	最小値	25 %点	中央値	平均値	75 %点	最大値
$\Delta \ln Y_t$	-1.45	.11	.67	.62	1.13	2.68
$\Delta \pi_t$	-1.69	-.50	-.03	-.02	.40	1.35
$\Delta \hat{r}_t$	-1.61	-.35	.03	.00	.45	1.71
$\Delta \ln U_t$	-8.82	-1.36	.73	.85	3.51	10.19

～2005 年第 I 四半期の計 99 四半期となる。 $\{\Delta \mathbf{y}_t\}$ の要約統計量は表 3.2 の通りである (100 倍して表記)。

5.2 モデル

未知パラメーターの数を減らすため、あらかじめ中心化した系列に定数項なしの VAR モデルを仮定する。 N 変量 VAR(p) モデルの各式は Np 個の係数をもつ。低次の VAR モデルは高次の VAR モデルの特殊ケースなので、大きめの p を選んだ方が定式化の誤りは避けられる。ただし未知パラメーターの数が増えるので推定効率は低下する。本稿では VAR(8) モデルを採用する。

ギブス抽出による VAR モデルのベイズ推測の手順は補論を参照。VAR モデルは多変量線形回帰モデルである。未知パラメーター $(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\Sigma})$ の事前分布としては、次の漠然とした正規・ウィシャート型事前分布を採用する。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi} | \boldsymbol{\Sigma} &\sim N(\mathbf{0}, 10000 \mathbf{I}_{N^2 p}), \\ \boldsymbol{\Sigma}^{-1} | \boldsymbol{\pi} &\sim W_N(N+1, 10000 \mathbf{I}_N). \end{aligned}$$

ギブス抽出には Geweke [1999] によるパッケージ BACC 2003 を R Development Core Team [2006] が開発した統計ソフト R 2.4.0 上で利用する。ギブス標本は定常分布から抽出しなければならない。本稿では最初の 1,000 個の抽出で定常分布に収束したと判断し、次の 10,000 個の抽出で事後分布をシミュレートする。

5.3 推定結果

自然率

図 3.1 は各変数の実際の値と自然率（点推定値）を比較したプロットである。数量変数である産出量・失業率は実際の値が滑らかであり，その周りを自然率が緩やかに変動している。実際の値より自然率の方が景気との関連が強く，永続的ショックにともなう自然率の変化を実際の値が追いかけているようにも見える。先行研究の生産関数に基づく潜在産出量（例えば宮尾 [2004]）と本稿の自然産出量は大きく異なる。これは定義が異なるので当然である。鎌田・廣瀬 [2003] は Hodrick–Prescott フィルターとフィリップス曲線を組み合わせて実際の値より滑らかな自然産出量（インフレを加速しない生産量）を得ている。

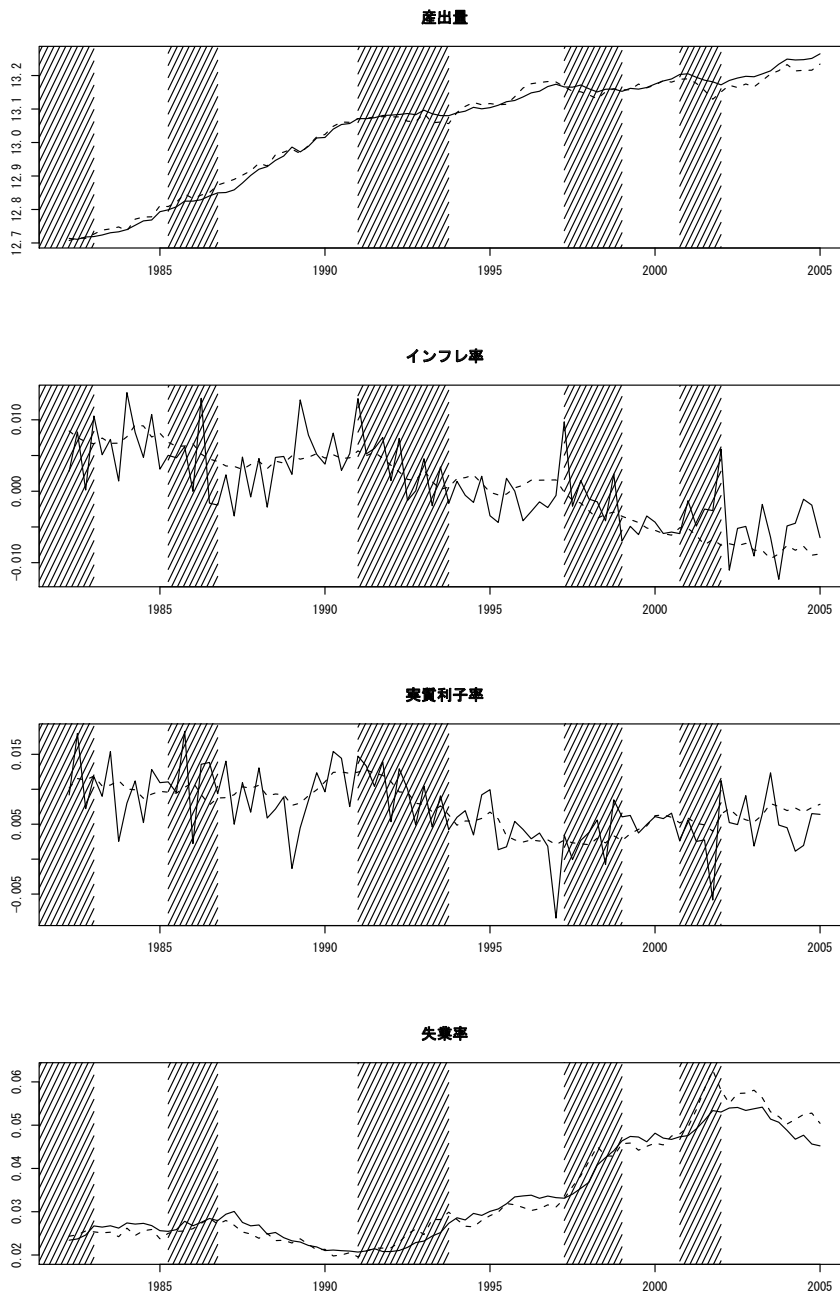
価格変数であるインフレ率・実質利子率は実際の値が小刻みに変動しており，その基調を自然率が捉えている。実質利子率は事後的な値なので 1 期先のインフレ率と逆の動きを示している。滑らかな自然インフレ率はコア・インフレ率の定義とも合致する。インフレ率・実質利子率とも 1980 年以降は低下傾向にあるが，景気の拡張期より後退期の方が大きく低下するのが自然率から読み取れる。

ギャップ

図 3.2 は各変数のギャップの点推定値と誤差バンドのプロットである。自然率／ギャップの推定誤差は非常に大きく，95 % 誤差バンドだと幅が広くなりすぎる。そこで Sims and Zha [1999] のインパルス応答関数の例に倣い，68 % 誤差バンド（16 % 点と 84 % 点）を図示してある。これは正規分布なら標準誤差バンドと解釈できる。

点推定値で見ると，産出ギャップは最大で 5 % 程度，失業率ギャップは最大で 1 % ポイント程度である。アメリカのデータに同じ手法を適用した Murasawa [2006] の結果では，アメリカの産出ギャップは最大で 5 % 程度，失業率ギャップは最大で 3 % ポイント程度である。日本もアメリカも自然失業率は同程度に滑らかである。したがって日本の失業率ギャップが小さいのは失

図 3.1 自然率



(注) 実線は実際の値, 破線は自然率, シャドーは景気後退期.

業率そのものの変動が小さいためである。これは日本では一時的ショックが少ないか、あるいは一時的ショックに対して失業率が硬直的であることを意味する。例えば負の一時的ショックに対する労働保蔵や求職意欲喪失は失業率を硬直的にする。

自然率／ギャップの推定誤差は大きいですが、ギャップが正である確率は事後分布から正確に計算できる。図 3.3 は正のギャップの事後確率のプロットである。この確率指数はギャップの符号に関心がある場合に有用である。産出ギャップは景気拡張（後退）期に負（正）になる傾向がある。失業率ギャップも景気と逆方向に動いている。潜在産出量を基準にした産出ギャップは原則として常に負であるが、ほとんどの先行研究では景気拡張（後退）期にギャップのマイナス幅が縮小（拡大）する。したがって景気とギャップの相反する動きには違和感がある。

ただし景気とギャップの関係を論ずる際は、定義の混乱に注意が必要である。景気の拡張期・後退期は転換点（山・谷）を基準に決定されるので、ギャップの符号と一致する必然性はない（ただしギャップの転換点と景気基準日付も大きくずれている）。また本稿のギャップは定常均衡が基準であり、潜在産出量を基準にした産出ギャップと異なるだけでなく、数量が硬直的なら新しい新古典派総合の自然率／ギャップとも異なる。したがって永続的ショックにとまなう自然率の変化を実際の値が追いかけていると解釈すれば、景気とギャップの相反する動きは不自然ではない。すなわち景気拡張（後退）期には、まず自然率が上昇（低下）し、それを実際の値が追いかける。したがってギャップは最初はマイナス（プラス）となり、次第に0に戻っていく。定常均衡を基準としたギャップが金融政策の運営に役立つかどうかは自明でないが、その批判は時系列分析で自然率／ギャップを推定した多くの先行研究にも当てはまる。

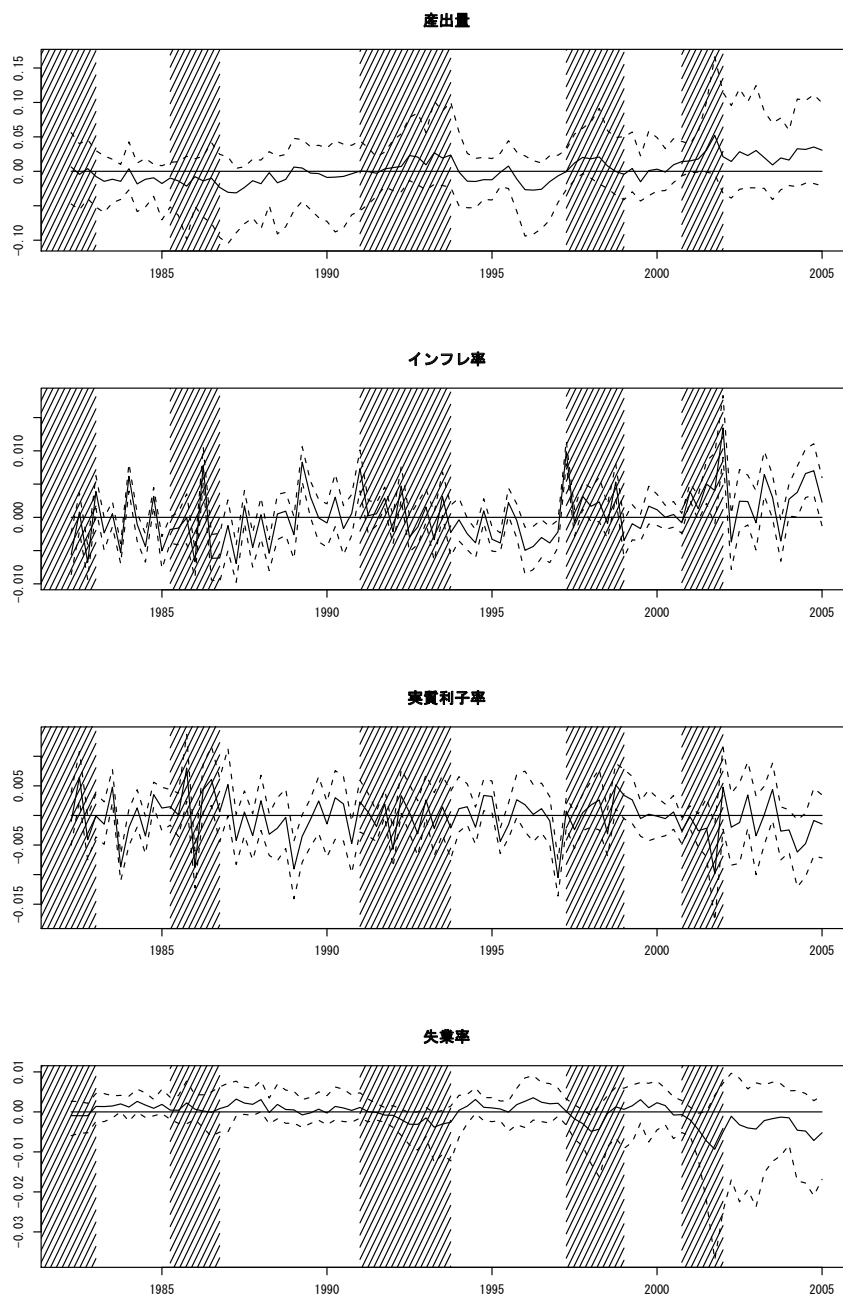
フィリップス曲線とオークンの法則

* 印つきで自然率を表記する。産出量に関するフィリップス曲線は

$$\pi_t - \pi_t^* = \alpha(\ln Y_t - \ln Y_t^*) + u_t,$$

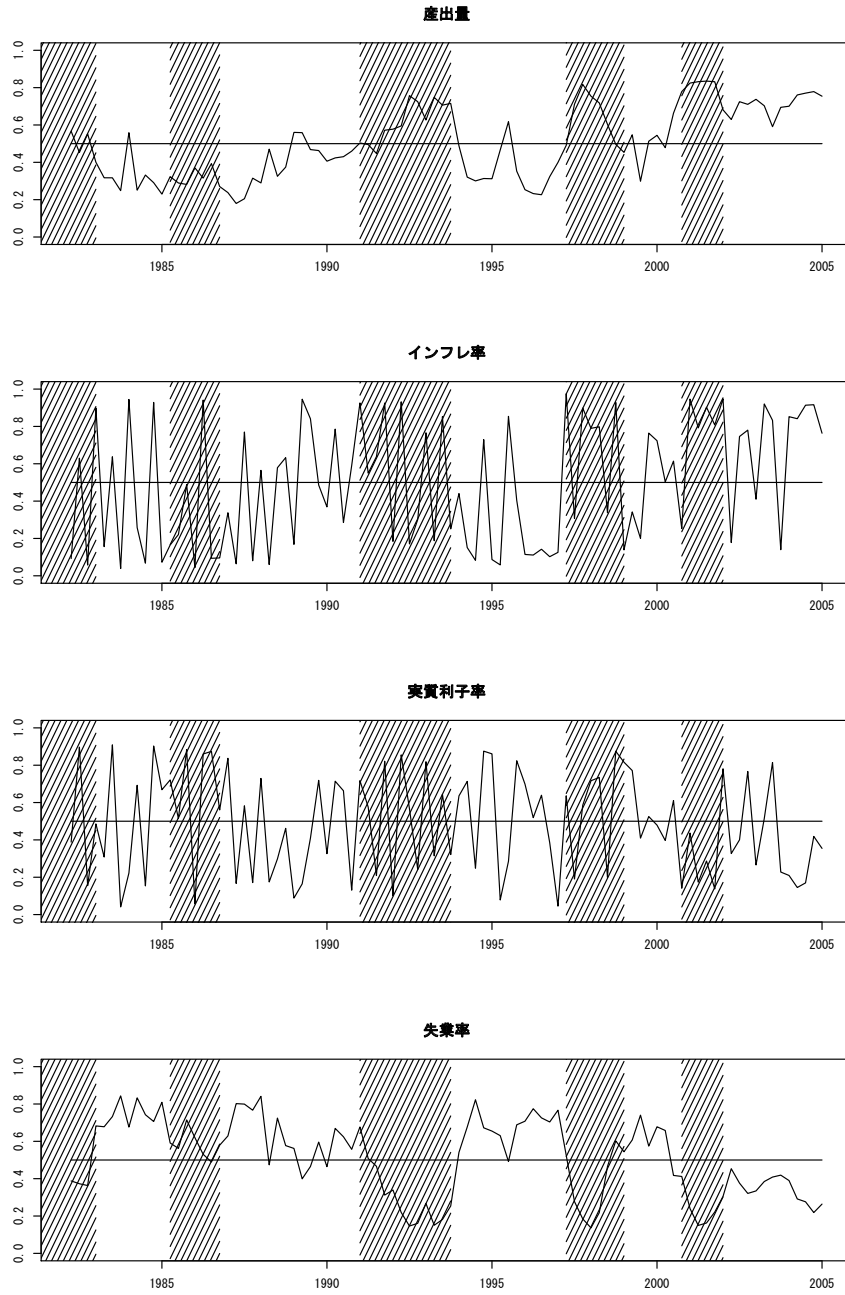
$$E(u_t) = 0,$$

図 3.2 ギャップ



(注) 破線は 68 % 誤差バンド (16 % 点と 84 % 点), シャドーは景気後退期.

図 3.3 正のギャップの事後確率



(注) シャドーは景気後退期.

ただし $\alpha > 0$ で $\{u_t\}$ は $I(0)$. 失業率に関するフィリップス曲線は

$$\begin{aligned}\pi_t - \pi_t^* &= \beta(\ln U_t - \ln U_t^*) + v_t, \\ E(v_t) &= 0,\end{aligned}$$

ただし $\beta < 0$ で $\{v_t\}$ は $I(0)$. これらは $\pi_t^* = E_{t-1}(\pi_t)$ なら新しい古典派, $\pi_t^* = E_t(\pi_{t+1})$ なら新しいケインズ派のフィリップス曲線と解釈できる. オークンの法則は

$$\begin{aligned}\ln Y_t - \ln Y_t^* &= \gamma(\ln U_t - \ln U_t^*) + w_t, \\ E(w_t) &= 0,\end{aligned}$$

ただし $\gamma < 0$ で $\{w_t\}$ は $I(0)$.

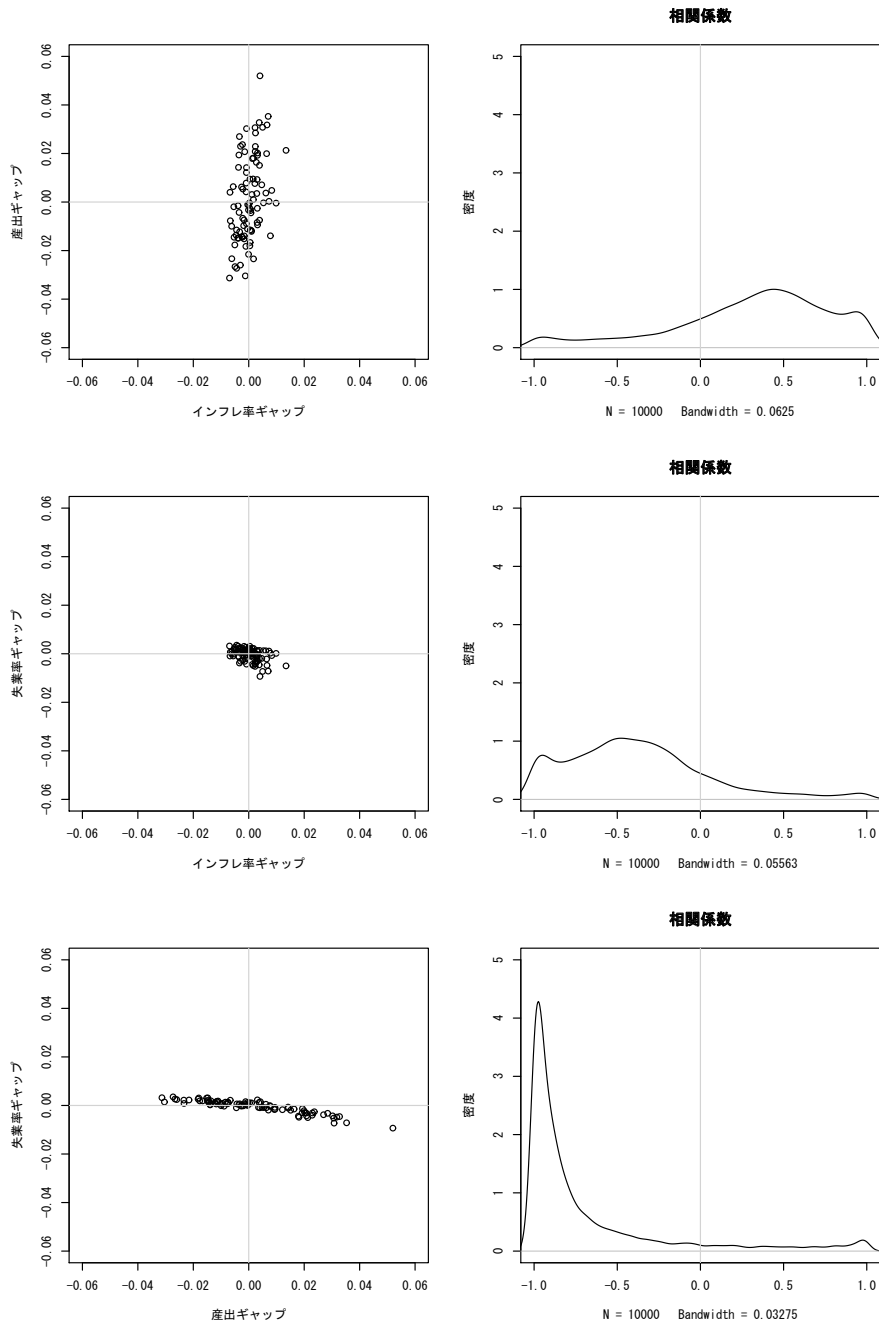
図 3.4 の左側は産出量・インフレ率・失業率のギャップ（点推定値）の散布図, 右側は相関係数の事後密度関数のカーネル推定値である. 2つのフィリップス曲線は概ね $\alpha > 0$, $\beta < 0$ を示しており, 理論と整合的である. ただし産出量・失業率のギャップが景気と逆方向に動くなら, インフレ率ギャップも逆方向に動くことになる. オークンの法則は明白に $\gamma < 0$ を示している.

6 おわりに

本稿では自然率＝定常均衡と解釈し, ベイジアン多変量 B-N 分解を用いて日本の自然率／ギャップを推定した. 本稿の手法は変数選択と VAR モデルの次数選択を除いてほぼ機械的である. 変数選択については単純な金融マクロ・モデルを構成する最小限の変数を選んでおり, VAR モデルの次数も高めに設定して定式化の誤りを最小限に留めている. したがって本稿の結果は日本の自然率／ギャップのベンチマーク推定値と位置づけられる.

自然率／ギャップの推定誤差は大きい, ベイズ推測によりギャップの符号や相関係数について確率的な情報は得られる. ギャップは景気と逆方向に動くが, 永続的ショックにともなう自然率の変化を実際の値が追いかけていると解釈すれば不自然ではない. またフィリップス曲線やオークンの法則は成立する.

図 3.4 フィリップス曲線とオークンの法則



ただし本稿の分析は構造変化の可能性を無視している。今後はスイッチング・モデルや可変パラメーター・モデルへの拡張が必要であろう。非線形モデルでは B-N 分解の存在は自明でないので、これは今後の課題としたい。

また数量が硬直的なら自然率=定常均衡という解釈は成立しない。定常均衡でなく本来の意味での自然率の推定を目的とするなら、硬直性をモデル化して構造的に推定する方が望ましいであろう。ただしその場合の正しい定式化は自明でないので、これも今後の課題としたい。

補論：ベイズ推測の手順

$\{\Delta \mathbf{y}_t\}_{t=1}^T$ を観測したときの VAR モデルの係数の推定を考える。簡単化のため $\boldsymbol{\mu} := \mathbf{0}$ とする。 $\{\Delta \mathbf{y}_t\}_{t=1}^T$ に次のガウス型 VAR(p) モデルを仮定する。

$$\begin{aligned} \Phi(L)\Delta \mathbf{y}_t &= \mathbf{w}_t, \\ \{\mathbf{w}_t\} &\sim \text{IN}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}). \end{aligned}$$

$\boldsymbol{\Pi} := [\boldsymbol{\Phi}_1, \dots, \boldsymbol{\Phi}_p]$ とすると、 $t = p+1, \dots, T$ について

$$\Delta \mathbf{y}_t = \boldsymbol{\Pi} \mathbf{s}_{t-1} + \mathbf{w}_t.$$

以下の行列を定義する。

$$\mathbf{Y} := \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{y}'_{p+1} \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{y}'_T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} := \begin{bmatrix} \mathbf{s}'_p \\ \vdots \\ \mathbf{s}'_{T-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} := \begin{bmatrix} \mathbf{w}'_{p+1} \\ \vdots \\ \mathbf{w}'_T \end{bmatrix}.$$

すると

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} \boldsymbol{\Pi}' + \mathbf{U}.$$

以下のベクトルを定義する。

$$\mathbf{y} := \text{vec}(\mathbf{Y}), \quad \boldsymbol{\pi} := \text{vec}(\boldsymbol{\Pi}'), \quad \mathbf{u} := \text{vec}(\mathbf{U}).$$

すると次の正規線形モデルが得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{X}) \boldsymbol{\pi} + \mathbf{u}, \\ \mathbf{u} &\sim \text{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}_T). \end{aligned}$$

ベイズ推測では事後分布 $p(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\Sigma} | \mathbf{y}, \mathbf{X})$ が必要となる。ギブス抽出では条件つき分布 $p(\boldsymbol{\pi} | \boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{y}, \mathbf{X})$ と $p(\boldsymbol{\Sigma} | \boldsymbol{\pi}, \mathbf{y}, \mathbf{X})$ から交互に抽出することで同時分布 $p(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\Sigma} | \mathbf{y}, \mathbf{X})$ をシミュレートする。ベイズの定理より

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{\pi} | \boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{y}, \mathbf{X}) &\propto p(\mathbf{y}, \mathbf{X} | \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\Sigma}) p(\boldsymbol{\pi} | \boldsymbol{\Sigma}), \\ p(\boldsymbol{\Sigma} | \boldsymbol{\pi}, \mathbf{y}, \mathbf{X}) &\propto p(\mathbf{y}, \mathbf{X} | \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\Sigma}) p(\boldsymbol{\Sigma} | \boldsymbol{\pi}). \end{aligned}$$

以下の正規・ウィシャート型共役事前分布を仮定する。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi} | \boldsymbol{\Sigma} &\sim N(\boldsymbol{\pi}_0, \mathbf{V}_0), \\ \boldsymbol{\Sigma}^{-1} | \boldsymbol{\pi} &\sim W_N(n_0, \mathbf{S}_0). \end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi} | \boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{y}, \mathbf{X} &\sim N\left(\boldsymbol{\pi}_*, \left\{[\boldsymbol{\Sigma} \otimes (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}]^{-1} + \mathbf{V}_0^{-1}\right\}^{-1}\right), \\ \boldsymbol{\Sigma}^{-1} | \boldsymbol{\pi}, \mathbf{y}, \mathbf{X} &\sim W_N\left(T - p + n_0, [(\mathbf{Y}' - \boldsymbol{\Pi}\mathbf{X}')(\mathbf{Y}' - \boldsymbol{\Pi}\mathbf{X}')' + \mathbf{S}_0^{-1}]^{-1}\right), \end{aligned}$$

ただし $\boldsymbol{\pi}$ の OLS 推定量を $\hat{\boldsymbol{\pi}}$ として、

$$\boldsymbol{\pi}_* := \left\{[\boldsymbol{\Sigma} \otimes (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}]^{-1} + \mathbf{V}_0^{-1}\right\}^{-1} \left\{[\boldsymbol{\Sigma} \otimes (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}]^{-1} \hat{\boldsymbol{\pi}} + \mathbf{V}_0^{-1} \boldsymbol{\pi}_0\right\}.$$

導出は Geweke [2005, sec. 5.2] を参照。

正規・ウィシャート型共役事前分布の下での正規線形モデルのベイズ推測には Geweke [1999] によるパッケージ BACC (Bayesian Analysis, Computation and Communication) が便利である。McCausland [2004] が使用例を詳細に解説している。

抽出した $\boldsymbol{\pi}$ (VAR モデルの係数) ごとに (3.4) 式から $\{\mathbf{c}_t\}$ を求めれば、 $\{\mathbf{c}_t\}$ の事後分布もシミュレートできる。事後分布が平均・分散をもつとは限らないので、シミュレーション標本の標本中位数を点推定値とし、標本分位点で推定誤差を評価する。

参考文献

- Apel, M. and P. Jansson [1999a], “System Estimates of Potential Output and the NAIRU,” *Empirical Economics* **24**, pp. 373–388.
- Apel, M. and P. Jansson [1999b], “A Theory-Consistent System Approach for Estimating Potential Output and the NAIRU,” *Economics Letters* **64**, pp. 271–275.
- Basistha, A. and R. Startz [2004], “Measuring the NAIRU with Reduced Uncertainty: A Multiple Indicator-Common Component Approach,” Working Paper UWEC-2004-22, University of Washington.
- Beveridge, S. and C. R. Nelson [1981], “A New Approach to Decomposition of Economic Time Series into Permanent and Transitory Components with Particular Attention to Measurement of the ‘Business Cycle’,” *Journal of Monetary Economics* **7**, pp. 151–174.
- Cogley, T. [2002], “A Simple Adaptive Measure of Core Inflation,” *Journal of Money, Credit, and Banking* **34**, pp. 94–113.
- Cogley, T. and T. J. Sargent [2001], “Evolving Post-World War II U.S. Inflation Dynamics,” *NBER Macroeconomics Annual* **16**, pp. 331–373.
- Cogley, T. and T. J. Sargent [2005], “Drifts and Volatilities: Monetary Policies and Outcomes in the Post WWII US,” *Review of Economic Dynamics* **8**, pp. 262–302.
- Doménech, R. and V. Gómez [2006], “Estimating Potential Output, Core Inflation, and the NAIRU as Latent Variables,” *Journal of Business and*

- Economic Statistics* **24**, pp. 354–365.
- Geweke, J. [1999], “Using Simulation Methods for Bayesian Econometric Models: Inference, Development, and Communication,” *Econometric Reviews* **18**, pp. 1–73.
- Geweke, J. [2005], *Contemporary Bayesian Econometrics and Statistics*, John Wiley & Sons.
- King, T. B. and J. Morley [2006], “In Search of the Natural Rate of Unemployment,” *Journal of Monetary Economics*, forthcoming.
- Laubach, T. and J. C. Williams [2003], “Measuring the Natural Rate of Interest,” *Review of Economics and Statistics* **85**, pp. 1063–1070.
- McCausland, W. J. [2004], “Using the BACC software for Bayesian Inference,” *Computational Economics* **23**, pp. 201–218.
- Morley, J. C. [2002], “A State-Space Approach to Calculating the Beveridge–Nelson Decomposition,” *Economics Letters* **75**, pp. 123–127.
- Murasawa, Y. [2006], “Measuring the Natural Rates, Gaps, and Deviation Cycles,” unpublished.
- Orphanides, A. and S. van Norden [2002], “The Unreliability of Output-Gap Estimates in Real Time,” *Review of Economics and Statistics* **84**, pp. 569–583.
- R Development Core Team [2006], *R: A Language and Environment for Statistical Computing*, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, ISBN 3-900051-07-0.
- Sims, C. A. and T. Zha [1999], “Error Bands for Impulse Responses,” *Econometrica* **67**, pp. 1113–1155.
- Woodford, M. [2003], *Interest and Prices—Foundations of a Theory of Monetary Policy*, Princeton University Press.
- 鎌田康一郎・廣瀬康生 [2003], 「潜在 GDP とフィリップス曲線を同時推計する新手法」『金融研究』第 22 巻第 2 号, 13～34 ページ.
- 小巻泰之 [2003], 「景気指標の不確実性」, 浅子和美・福田慎一 (編) 『景気循環と景気予測』東京大学出版会, 311～335 ページ.

- 廣瀬康生・鎌田康一郎 [2002], 「可変 NAIRU によるわが国の潜在成長率」,
Working Paper Series 02-8, 日本銀行調査統計局.
- 宮尾龍蔵 [2004], 「GDP ギャップの推計と供給サイドの構造変化」, 福田慎
一・粕谷宗久 (編) 『日本経済の構造変化と経済予測—経済変動のダイナミ
ズムを読む』東京大学出版会, 153~186 ページ.