第 8 回　回帰係数の検定（6.4–6.5）

村澤 康友

2020 年 6 月 9 日

今日のポイント

1. 誤差項が独立に $\mathrm{N}\left(0,\sigma^2\right)$ に従う線形回帰モデルを古典的正規線形回帰モデルという．古典的正規線形回帰モデルの回帰係数の OLS 推定量は正規分布にしたがう．誤差分散 σ^2 の不偏推定量 s^2 は $(n-k)s^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-k)$.
2. H_0 :「個別の回帰係数＝ 0」を検定する t 統計量の値を t 値という．H_0 の下で $t \sim \mathrm{t}(n-k)$.
3. H_0 :「定数項を除く全ての回帰係数＝ 0」を検定する F 統計量の値を F 値という．H_0 の下で $F \sim \mathrm{F}(k-1,n-k)$.
4. 線形モデルで $\mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i u_i) = \boldsymbol{0}$ かつ無作為標本なら OLS 推定量は一致推定量．さらに $\mathrm{var}(u_i|\boldsymbol{x}_i) = \sigma^2$ なら OLS 推定量の漸近分布は古典的正規線形回帰モデルの場合と同じ.

目次

1　OLS 推定量の標本分布

1.1　古典的正規線形回帰モデル（p. 148）

$(1+k)$ 変量データを $((y_1,\boldsymbol{x}_1),\ldots,(y_n,\boldsymbol{x}_n))$ とする．ただし $\boldsymbol{x}_i := (x_{i,1},\ldots,x_{i,k})'$. y_i の $\boldsymbol{x}_i$ 上への線形回帰モデルは

$$\mathrm{E}(y_i|\boldsymbol{x}_i) = \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{x}_i$$

または

$$\begin{aligned} y_i &= \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{x}_i + u_i \\ \mathrm{E}(u_i|\boldsymbol{x}_i) &= 0 \end{aligned}$$

定義 1. $(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)$ を所与として $u_1,\ldots,u_n$ が独立に $\mathrm{N}\left(0,\sigma^2\right)$ に従う線形回帰モデルを**古典的正規線形回帰モデル**という.

注 1. すなわち

$$
\begin{gathered}
y_i = \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{x}_i + u_i \\
\{u_i\}|\{\boldsymbol{x}_i\} \sim \mathrm{IN}\left(0, \sigma^2\right)
\end{gathered}
$$

または

$$
\{y_i\}|\{\boldsymbol{x}_i\} \sim \mathrm{IN}\left(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{x}_i, \sigma^2\right)
$$

1.2 回帰係数の OLS 推定量（p. 148）

既に見た通り

$$
\boldsymbol{b} = \left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i'\right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i y_i
$$

定理 1. 古典的正規線形回帰モデルなら

$$
\boldsymbol{b}|\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \sim \mathrm{N}\left(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i'\right)^{-1}\right)
$$

証明. $(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ を所与として $\boldsymbol{b}$ は $y_1, \ldots, y_n$ の線形変換だから（k 変量）正規分布．平均と分散は既に見た． □

1.3 誤差分散の不偏推定量

$\hat{y}_i := \boldsymbol{b}'\boldsymbol{x}_i$ とすると，σ^2 の不偏推定量は

$$
s^2 := \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2
$$

ただし k は推定する係数の数．

定理 2. 古典的正規線形回帰モデルなら

$$
\frac{(n-k)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-k)
$$

証明. 省略（行列を使うと簡単）． □

定理 3. 古典的正規線形回帰モデルなら $\boldsymbol{b}$ と s^2 は独立．

証明. 省略（行列を使うと簡単）． □

1.4 標準誤差（p. 149）

定義 2. 推定量の標準偏差の推定値を標準誤差という．

注 2. $\boldsymbol{b}$ の分散は $\sigma^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i'\right)^{-1}$．その推定値は $s^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i'\right)^{-1}$．この対角成分の平方根が各係数の OLS 推定量の標準誤差．定数項のない単回帰モデルなら b の標準誤差は

$$
\mathrm{s.e.}(b) = \sqrt{\frac{s^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}
$$

2 回帰係数の t 検定

2.1 分散が既知（p. 149）

簡単化のため定数項のない単回帰モデルで考える．y_i の x_i 上への古典的正規線形回帰モデルは

$$
\begin{gathered}
y_i = \beta x_i + u_i \\
\{u_i\}|\{x_i\} \sim \mathrm{IN}\left(0, \sigma^2\right)
\end{gathered}
$$

次の片側検定問題を考える．

$$
H_0 : \beta = c \quad \text{vs} \quad H_1 : \beta > c
$$

β の OLS 推定量を b とすると

$$
b|x_1, \ldots, x_n \sim \mathrm{N}\left(\beta, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right)
$$

標準化すると

$$
\frac{b-\beta}{\sqrt{\sigma^2 / \sum_{i=1}^{n} x_i^2}}|x_1, \ldots, x_n \sim \mathrm{N}(0,1)
$$

この分布は $x_1, \ldots, x_n$ に依存しないので

$$
\frac{b-\beta}{\sqrt{\sigma^2 / \sum_{i=1}^{n} x_i^2}} \sim \mathrm{N}(0,1)
$$

検定統計量は

$$
Z := \frac{b-c}{\sqrt{\sigma^2 / \sum_{i=1}^{n} x_i^2}}
$$

H_0 の下で

$$
Z \sim \mathrm{N}(0,1)
$$

標準正規分布表より棄却域を定める．

2.2 分散が未知（p. 149）

σ^2 の推定量 s^2 について

$$
\frac{(n-k)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-k)
$$

また b と s^2 は独立．したがって σ^2 を s^2 に置き換えると

$$
\frac{b-\beta}{\sqrt{s^2 / \sum_{i=1}^{n} x_i^2}} \sim \mathrm{t}(n-k)
$$

検定統計量（t 統計量）は

$$t := \frac{b-c}{\sqrt{s^2/\sum_{i=1}^n x_i^2}}$$

H_0 の下で

$$t \sim \mathrm{t}(n-k)$$

t 分布表より棄却域を定める．

2.3 t 値

定義 3. $H_0 : \beta = 0$ を検定する t 統計量の値を t 値という．

注 3. すなわち

$$t = \frac{b}{\mathrm{s.e.}(b)}$$

3 回帰係数の F 検定

3.1 分散が既知

簡単化のため定数項のない単回帰モデルで考える．y_i の x_i 上への古典的正規線形回帰モデルは

$$\begin{aligned} y_i &= \beta x_i + u_i \\ \{u_i\}|\{x_i\} &\sim \mathrm{IN}\left(0, \sigma^2\right) \end{aligned}$$

次の両側検定問題を考える．

$$H_0 : \beta = c \quad \text{vs} \quad H_1 : \beta \neq c$$

β の OLS 推定量を b とすると

$$b|x_1, \dots, x_n \sim \mathrm{N}\left(\beta, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right)$$

標準化すると

$$\frac{b-\beta}{\sqrt{\sigma^2/\sum_{i=1}^n x_i^2}}|x_1, \dots, x_n \sim \mathrm{N}(0,1)$$

この分布は $x_1, \dots, x_n$ に依存しないので

$$\frac{b-\beta}{\sqrt{\sigma^2/\sum_{i=1}^n x_i^2}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

2 乗すると

$$\frac{(b-\beta)^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$$

検定統計量は

$$\chi^2 := \frac{(b-c)^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}{\sigma^2}$$

H_0 の下で

$$\chi^2 \sim \chi^2(1)$$

χ^2 分布表より棄却域を定める．

注 4. 重回帰モデルの複数の係数の両側検定に拡張できる（行列を使うと簡単）．r 個の係数の検定なら H_0 の下で $\chi^2 \sim \chi^2(r)$．

3.2 分散が未知（p. 154）

σ^2 の推定量 s^2 について

$$\frac{(n-k)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-k)$$

また b と s^2 は独立．したがって σ^2 を s^2 に置き換えると

$$\begin{aligned} \frac{(b-\beta)^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}{s^2} &= \frac{(b-\beta)^2 \sum_{i=1}^n x_i^2/\sigma^2}{[(n-k)s^2/\sigma^2]/(n-k)} \\ &\sim \mathrm{F}(1, n-k) \end{aligned}$$

検定統計量（F 統計量）は

$$F := \frac{(b-c)^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}{s^2}$$

H_0 の下で

$$F \sim \mathrm{F}(1, n-k)$$

F 分布表より棄却域を定める．

注 5. 重回帰モデルの複数の係数の両側検定に拡張できる（行列を使うと簡単）．r 個の係数の検定なら H_0 の下で $F \sim \mathrm{F}(r, n-k)$．

3.3 F 値

定義 4. $H_0 : \beta = 0$ を検定する F 統計量の値を F 値という．

注 6. 次の重回帰モデルを考える．

$$\begin{aligned} y_i &= \beta_1 + \beta_2 x_{i,2} + \dots + \beta_k x_{i,k} + u_i \\ \{u_i\} &\sim \mathrm{IN}\left(0, \sigma^2\right) \end{aligned}$$

ただし β_1 は定数項．次の両側検定問題を考える．

$$H_0 : \begin{pmatrix} \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad \text{vs} \quad H_1 : \begin{pmatrix} \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$$

このとき H_0 の下で

$$F \sim \mathrm{F}(k-1, n-k)$$

4　OLS 推定量の漸近特性

4.1　線形モデル（p. 157）

$(1+k)$ 変量データを $((y_1,\boldsymbol{x}_1),\dots,(y_n,\boldsymbol{x}_n))$ とする．ただし $\boldsymbol{x}_i := (x_{i,1},\dots,x_{i,k})'$．$y_i$ の $\boldsymbol{x}_i$ 上への線形モデルは

$$
\begin{aligned}
y_i &= \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{x}_i + u_i \\
\mathrm{E}(u_i) &= 0
\end{aligned}
$$

定理 4. $\mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i u_i) = \mathbf{0}$ で $\mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i')$ の逆行列が存在すれば

$$\boldsymbol{\beta} = \mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i')^{-1}\,\mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i y_i)$$

証明. $u_i = y_i - \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta}$ を代入すると

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i(y_i - \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta})) = \mathbf{0}$$

すなわち

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i y_i) = \mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i')\boldsymbol{\beta}$$

この連立方程式を $\boldsymbol{\beta}$ について解けばよい． □

4.2　MM（= OLS）推定量

$\boldsymbol{\beta}$ の MM（= OLS）推定量を $\boldsymbol{b}_n$ とすると

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i(y_i - \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{b}_n) = \mathbf{0}$$

すなわち

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i y_i = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{b}_n$$

この連立方程式を $\boldsymbol{b}_n$ について解くと

$$\boldsymbol{b}_n = \left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i'\right)^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i y_i$$

4.3　漸近演算（p. 152）

定理 5 (スルツキーの定理)**.** $\operatorname{plim}_{n\to\infty} X_n \to c$ で $f(.)$ が c で連続なら

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} f(X_n) = f(c)$$

証明. 省略（大学院レベル）. □

注 7. すなわち

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} f(X_n) = f\left(\operatorname*{plim}_{n\to\infty} X_n\right)$$

定理 6 (クラーメルの定理)**.** $\operatorname{plim}_{n\to\infty} X_n \to c$ で $Y_n \xrightarrow{d} Y$ なら

$$X_n Y_n \xrightarrow{d} cY$$

証明. 省略（大学院レベル）. □

注 8. こちらをスルツキーの定理と呼ぶ場合もある．

例 1. 例えば $\operatorname{plim}_{n\to\infty} X_n \to c$ で $Z_n \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0,1)$ なら

$$X_n Z_n \xrightarrow{d} \mathrm{N}\left(0, c^2\right)$$

定理 7 (連続写像定理)**.** $X_n \xrightarrow{d} X$ で $f(.)$ が連続なら

$$f(X_n) \xrightarrow{d} f(X)$$

証明. 省略（大学院レベル）. □

例 2. 例えば $Z_n \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0,1)$ なら $Z_n^2 \xrightarrow{d} \chi^2(1)$.

4.4　一致性（p. 156）

以下では無作為標本を仮定する．

定理 8. $\mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i u_i) = \mathbf{0}$ で $\mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i')$ の逆行列が存在すれば

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{\beta}$$

証明. 大数の法則より

$$
\begin{aligned}
\operatorname*{plim}_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i' &= \mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i') \\
\operatorname*{plim}_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i y_i &= \mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i y_i)
\end{aligned}
$$

スルツキーの定理より

$$
\begin{aligned}
\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \boldsymbol{b}_n &= \left(\operatorname*{plim}_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i'\right)^{-1}\operatorname*{plim}_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i y_i \\
&= \mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i')^{-1}\,\mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i y_i)
\end{aligned}
$$

$\mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i u_i) = \mathbf{0}$ よりこれは $\boldsymbol{\beta}$. □

4.5　漸近正規性（p. 157）

補題 1. $\mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i u_i) = \mathbf{0}$ で $\operatorname{var}(u_i|\boldsymbol{x}_i) = \sigma^2$ なら

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i u_i \xrightarrow{d} \mathrm{N}\left(\mathbf{0}, \sigma^2\,\mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i')\right)$$

証明. $\mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i u_i) = \mathbf{0}$ なので中心極限定理より

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i u_i \xrightarrow{d} \mathrm{N}(\mathbf{0}, \mathrm{var}(\boldsymbol{x}_i u_i))$$

繰り返し期待値の法則より

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(\boldsymbol{x}_i u_i) &= \mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i u_i (\boldsymbol{x}_i u_i)') \\
&= \mathrm{E}\left(u_i^2 \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i'\right) \\
&= \mathrm{E}\left(\mathrm{E}\left(u_i^2 \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i' | \boldsymbol{x}_i\right)\right) \\
&= \mathrm{E}\left(\mathrm{E}\left(u_i^2 | \boldsymbol{x}_i\right) \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i'\right) \\
&= \mathrm{E}\left(\mathrm{var}(u_i | \boldsymbol{x}_i) \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i'\right) \\
&= \mathrm{E}\left(\sigma^2 \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i'\right) \\
&= \sigma^2 \mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i')
\end{aligned}$$

□

定理 9. $\mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i u_i) = \mathbf{0}$ で $\mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i')$ の逆行列が存在し，$\mathrm{var}(u_i | \boldsymbol{x}_i) = \sigma^2$ なら

$$\sqrt{n}(\boldsymbol{b}_n - \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{d} \mathrm{N}\left(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i')^{-1}\right)$$

証明. $y_i = \boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{\beta} + u_i$ より

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b}_n &= \left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i'\right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i (\boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{\beta} + u_i) \\
&= \boldsymbol{\beta} + \left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i'\right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i u_i
\end{aligned}$$

変形すると

$$\sqrt{n}(\boldsymbol{b}_n - \boldsymbol{\beta}) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i'\right)^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i u_i$$

大数の法則より

$$\operatorname*{plim}_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i' = \mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i')$$

補題より

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i u_i \xrightarrow{d} \mathrm{N}\left(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i')\right)$$

スルツキーの定理とクラーメルの定理より

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i'\right)^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i u_i \\
&\xrightarrow{d} \mathrm{N}\left(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i')^{-1}\right)
\end{aligned}$$

□

注 9. したがって

$$\boldsymbol{b}_n \overset{a}{\sim} \mathrm{N}\left(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 (n \mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i'))^{-1}\right)$$

または

$$\boldsymbol{b}_n | \boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n \overset{a}{\sim} \mathrm{N}\left(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i'\right)^{-1}\right)$$

すなわち OLS 推定量の漸近分布は古典的正規線形回帰モデルの場合と同じ.

5 今日のキーワード

古典的正規線形回帰モデル，標準誤差，t 値，F 値

6 次回までの準備

提出 宿題 4，復習テスト 1–8（提出方法は追って連絡）

復習 教科書第 6 章 4–5 節，復習テスト 8

試験 準備中（実施方法は追って連絡）