第 10 回　不均一分散（7.4–7.5）

村澤 康友

2020 年 6 月 27 日

今日のポイント

1. 回帰モデルで $\mathrm{var}(Y|X)$ が X に依存することを条件つき不均一分散という．
2. 条件つき不均一分散があるなら標準誤差の修正が必要．White の標準誤差は条件つき不均一分散があっても（なくても）漸近的に正しい．
3. Breusch–Pagan の検定や White の検定で条件つき不均一分散の有無を検定できる．

目次

1	不均一分散（p. 178）	1
2	標準誤差の修正	1
2.1	OLS 推定量の漸近分散（p. 180）	1
2.2	White の標準誤差（p. 180）	2
3	不均一分散の検定	2
3.1	Breusch–Pagan の検定（p. 182）	2
3.2	White の検定（p. 183）	3
4	今日のキーワード	4
5	次回までの準備	4

1　不均一分散（p. 178）

(Y, X) を確率ベクトルとする．Y の X 上への古典的線形回帰モデルは

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y|X) &= \alpha + \beta X \\ \mathrm{var}(Y|X) &= \sigma^2\end{aligned}$$

すなわち古典的線形回帰モデルでは $\mathrm{E}(Y|X)$ のみ X に依存し，$\mathrm{var}(Y|X)$ は X に依存しないと仮定する．

定義 1. $\mathrm{var}(Y|X)$ が X に依存せず，一定であることを**条件つき均一分散**という．

定義 2. $\mathrm{var}(Y|X)$ が X に依存することを**条件つき不均一分散**という．

2　標準誤差の修正

2.1　OLS 推定量の漸近分散（p. 180）

$((y_1, x_1), \dots, (y_n, x_n))$ を無作為標本とする．簡単化のため定数項のない単回帰モデルで考える．すなわち

$$\begin{aligned}y_i &= \beta x_i + u_i \\ \mathrm{E}(u_i|x_i) &= 0\end{aligned}$$

β の OLS 推定量を b_n とすると

$$b_n = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

定理 1.

$$\sqrt{n}(b_n - \beta) \xrightarrow{d} \mathrm{N}\left(0, \frac{\mathrm{var}(x_i u_i)}{\mathrm{E}(x_i^2)^2}\right)$$

証明．b_n の式に $y_i = \beta x_i + u_i$ を代入すると

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i(\beta x_i + u_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\ &= \beta + \frac{\sum_{i=1}^n x_i u_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\end{aligned}$$

式変形すると

$$\sqrt{n}(b_n - \beta) = \frac{(1/\sqrt{n}) \sum_{i=1}^n x_i u_i}{(1/n) \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

大数の法則より

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 = \mathrm{E}\left(x_i^2\right)$$

$\mathrm{E}(u_i|x_i) = 0 \Longrightarrow \mathrm{E}(x_i u_i) = 0$ なので中心極限定理より

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n x_i u_i \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0, \mathrm{var}(x_i u_i))$$

スルツキーの定理とクラーメルの定理より

$$\frac{(1/\sqrt{n})\sum_{i=1}^n x_i u_i}{(1/n)\sum_{i=1}^n x_i^2} \xrightarrow{d} \mathrm{N}\left(0, \frac{\mathrm{var}(x_i u_i)}{\mathrm{E}(x_i^2)^2}\right)$$

□

注 1. 条件つき均一分散なら $\mathrm{var}(u_i|x_i) = \sigma^2 \Longrightarrow \mathrm{var}(x_i u_i) = \sigma^2 \mathrm{E}\left(x_i^2\right)$.

2.2 White の標準誤差（p. 180）

条件つき不均一分散の下で $\mathrm{var}(x_i u_i)$ を推定したい．$\mathrm{E}(u_i|x_i) = 0 \Longrightarrow \mathrm{E}(x_i u_i) = 0$ より

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(x_i u_i) &= \mathrm{E}\left((x_i u_i)^2\right)\\ &= \mathrm{E}\left(x_i^2 u_i^2\right)\end{aligned}$$

OLS 残差を e_i とすると

$$\begin{aligned}e_i &:= y_i - b_n x_i\\ &= y_i - \beta x_i - (b_n x_i - \beta x_i)\\ &= u_i - (b_n - \beta)x_i\end{aligned}$$

定義 3. $\mathrm{var}(x_i u_i)$ の *White* の推定量は

$$\widehat{\mathrm{var}}(x_i u_i) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 e_i^2$$

定理 2.

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 e_i^2 = \mathrm{E}\left(x_i^2 u_i^2\right)$$

証明. e_i と u_i の関係式より

$$\begin{aligned}e_i^2 &= [u_i - (b_n - \beta)x_i]^2\\ &= u_i^2 - 2(b_n - \beta)x_i u_i + (b_n - \beta)^2 x_i^2\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 e_i^2\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2\left[u_i^2 - 2(b_n - \beta)x_i u_i + (b_n - \beta)^2 x_i^2\right]\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 u_i^2 - 2(b_n - \beta)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^3 u_i\\ &\quad + (b_n - \beta)^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^4\end{aligned}$$

$n \to \infty$ とすると，第 1 項は大数の法則より

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 u_i^2 = \mathrm{E}\left(x_i^2 u_i^2\right)$$

$\mathrm{plim}_{n\to\infty} b_n = \beta$ なので，スルツキーの定理より第 2 項と第 3 項は 0 に確率収束. □

注 2. したがって

$$\sqrt{n}(b_n - \beta) \overset{a}{\sim} \mathrm{N}\left(0, \frac{(1/n)\sum_{i=1}^n x_i^2 e_i^2}{[(1/n)\sum_{i=1}^n x_i^2]^2}\right)$$

または

$$b_n \overset{a}{\sim} \mathrm{N}\left(\beta, \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 e_i^2}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^2}\right)$$

定義 4. White の推定量を用いた標準誤差を *White* の標準誤差という.

注 3. 条件つき不均一分散があっても（なくても）漸近的に正しい標準誤差.

3 不均一分散の検定

3.1 Breusch–Pagan の検定（p. 182）

$(1 + k)$ 変量データを $((y_1, \boldsymbol{x}_1), \ldots, (y_n, \boldsymbol{x}_n))$ とする．次のような y_i の $\boldsymbol{x}_i$ 上への条件つき不均一分散をもつ線形回帰モデルを仮定する.

$$\begin{aligned}y_i &= \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{x}_i + u_i\\ \mathrm{E}(u_i|\boldsymbol{x}_i) &= 0\\ \mathrm{var}(u_i|\boldsymbol{x}_i) &= \sigma^2 f(\boldsymbol{\gamma}'\boldsymbol{x}_i)\end{aligned}$$

ただし $f(.) > 0$，$f(0) = 1$．また $\boldsymbol{\gamma}$ は $\left(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\right)$ に依存しない．条件つき不均一分散の検定問題は

$$H_0 : \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{0} \quad \text{vs} \quad H_1 : \boldsymbol{\gamma} \neq \boldsymbol{0}$$

$\boldsymbol{\beta}$ の OLS 推定量を $\boldsymbol{b}$，OLS 残差を $e_i := y_i - \boldsymbol{b}'\boldsymbol{x}_i$ とする．H_0 の下での誤差分散の推定量は

$$\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

定理 3. H_0 の下で

$$\mathrm{E}\left(u_i^2 - \sigma^2 | \boldsymbol{x}_i\right) = 0$$

証明. $\mathrm{E}(u_i|\boldsymbol{x}_i) = 0$ より $\mathrm{var}(u_i|\boldsymbol{x}_i) = \mathrm{E}\left(u_i^2|\boldsymbol{x}_i\right)$．したがって H_0 の下で

$$\mathrm{E}\left(u_i^2|\boldsymbol{x}_i\right) = \sigma^2$$

□

注 4. すなわち H_0 の下で $u_i^2 - \sigma^2$ は $\boldsymbol{x}_i$ で予測できない．u_i を e_i，σ^2 を $\hat{\sigma}^2$ に置き換えると，H_0 の下で

$$\mathrm{E}\left(e_i^2 - \hat{\sigma}^2 | \boldsymbol{x}_i\right) \approx 0$$

これを回帰モデルとみなして「H_0：全ての回帰係数$= 0$」を検定すればよい．ただし古典的正規線形回帰モデルでないので F 検定でなく漸近 χ^2 検定となる．

定義 5. $e_i^2 - \hat{\sigma}^2$ の $\boldsymbol{x}_i$ 上への線形回帰モデルにおける「H_0：全ての回帰係数$= 0$」の漸近 χ^2 検定を *Breusch–Pagan* **の検定**という．

注 5. 正確には Breusch–Pagan の検定の Koenker による改良版．

定理 4. *Breusch–Pagan* の検定統計量を LM とすると，H_0 の下で

$$LM \overset{a}{\sim} \chi^2(k)$$

証明. 省略. □

3.2 White の検定（p. 183）

$(1+k)$ 変量データを $((y_1, \boldsymbol{x}_1), \dots, (y_n, \boldsymbol{x}_n))$ とする．y_i の $\boldsymbol{x}_i$ 上への線形回帰モデルは

$$\begin{aligned} y_i &= \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta} + u_i \\ \mathrm{E}(u_i|\boldsymbol{x}_i) &= 0 \end{aligned}$$

条件つき不均一分散の検定問題は

$$\begin{aligned} &H_0 : \mathrm{var}(u_i|\boldsymbol{x}_i) = \sigma^2 \\ \text{vs}\quad &H_1 : \mathrm{var}(u_i|\boldsymbol{x}_i) = \sigma^2(\boldsymbol{x}_i) \end{aligned}$$

$\mathrm{E}(u_i|\boldsymbol{x}_i) = 0 \Longrightarrow \mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i u_i) = \boldsymbol{0}$ より

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(\boldsymbol{x}_i u_i) &= \mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i u_i (\boldsymbol{x}_i u_i)') \\ &= \mathrm{E}\left(u_i^2 \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i'\right) \end{aligned}$$

繰り返し期待値の法則より

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(u_i^2 \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i'\right) &= \mathrm{E}\left(\mathrm{E}\left(u_i^2 \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i' | \boldsymbol{x}_i\right)\right) \\ &= \mathrm{E}\left(\mathrm{E}\left(u_i^2 | \boldsymbol{x}_i\right) \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i'\right) \\ &= \mathrm{E}(\mathrm{var}(u_i|\boldsymbol{x}_i) \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i') \end{aligned}$$

したがって条件つき不均一分散の検定問題は

$$\begin{aligned} &H_0 : \mathrm{var}(\boldsymbol{x}_i u_i) = \sigma^2\,\mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i') \\ \text{vs}\quad &H_1 : \mathrm{var}(\boldsymbol{x}_i u_i) = \mathrm{E}\left(u_i^2 \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i'\right) \end{aligned}$$

以下の行列を定義する．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V}_0 &:= \sigma^2\,\mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i') \\ \boldsymbol{V}_1 &:= \mathrm{E}\left(u_i^2 \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i'\right) \end{aligned}$$

すると検定問題は

$$H_0 : \boldsymbol{V}_0 = \boldsymbol{V}_1 \quad \text{vs} \quad H_1 : \boldsymbol{V}_0 \neq \boldsymbol{V}_1$$

または

$$H_0 : \boldsymbol{V}_1 - \boldsymbol{V}_0 = \mathbf{O} \quad \text{vs} \quad H_1 : \boldsymbol{V}_1 - \boldsymbol{V}_0 \neq \mathbf{O}$$

ここで

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V}_1 - \boldsymbol{V}_0 &= \mathrm{E}\left(u_i^2 \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i'\right) - \sigma^2\,\mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i') \\ &= \mathrm{E}\left(\left(u_i^2 - \sigma^2\right) \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i'\right) \end{aligned}$$

ただし

$$\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i' = \begin{bmatrix} x_{i,1}^2 & \dots & x_{i,1}x_{i,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i,k}x_{i,1} & \dots & x_{i,k}^2 \end{bmatrix}$$

この $k \times k$ 行列は対角線を挟んで対称なので，異なる成分は $k(k+1)/2$ 個．これらを並べたベクトルを $\boldsymbol{z}_i := \mathrm{vech}(\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i')$ とする．ただし $\mathrm{vech}(.)$ は正方

行列の下三角部分の成分を取り出して並べる関数．すると H_0 の下で

$$\mathrm{E}\left(\left(u_i^2-\sigma^2\right)\boldsymbol{z}_i\right)=\mathbf{0}$$

$\boldsymbol{\beta}$ の OLS 推定量を $\boldsymbol{b}$，OLS 残差を $e_i := y_i - \boldsymbol{b}'\boldsymbol{x}_i$ とする．H_0 の下での誤差分散の推定量は

$$\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

定理 5. H_0 の下で

$$\operatorname{cov}\left(u_i^2-\sigma^2, \boldsymbol{z}_i\right)=\mathbf{0}$$

証明．$\mathrm{E}(u_i|\boldsymbol{x}_i)=0$ より $\operatorname{var}(u_i|\boldsymbol{x}_i)=\mathrm{E}\left(u_i^2|\boldsymbol{x}_i\right)$．したがって H_0 の下で

$$\mathrm{E}\left(u_i^2|\boldsymbol{x}_i\right)=\sigma^2$$

両辺の期待値をとると，繰り返し期待値の法則より

$$\mathrm{E}\left(u_i^2\right)=\sigma^2$$

したがって H_0 の下で

$$\operatorname{cov}\left(u_i^2-\sigma^2, \boldsymbol{z}_i\right)=\mathrm{E}\left(\left(u_i^2-\sigma^2\right)\boldsymbol{z}_i\right)$$

既に見た通り右辺は $\mathbf{0}$． □

注 6. u_i を e_i，σ^2 を $\hat{\sigma}^2$ に置き換えると，H_0 の下で

$$\operatorname{cov}\left(e_i^2-\hat{\sigma}^2, \boldsymbol{z}_i\right)\approx 0$$

$e_i^2-\hat{\sigma}^2$ の $\boldsymbol{z}_i$ 上への線形回帰モデルを考えると，H_0 の下で全ての回帰係数$=0$.

定義 6. $e_i^2-\hat{\sigma}^2$ の $\boldsymbol{z}_i := \operatorname{vech}(\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i')$ 上への線形回帰モデルにおける「H_0：全ての回帰係数$=0$」の漸近 χ^2 検定を ***White* の検定**という．

定理 6. *White* の検定統計量を W とすると，H_0 の下で

$$W \overset{a}{\sim} \chi^2\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)$$

証明．省略． □

注 7. どのような不均一分散でも使えるが，自由度が大きいため検出力が低い．

4 今日のキーワード

条件つき均一分散，条件つき不均一分散，White の推定量，White の標準誤差，Breusch–Pagan の検定，White の検定

5 次回までの準備

提出 宿題 5

復習 教科書第 7 章 4–5 節，復習テスト 10

予習 教科書第 8 章