

計量経済 I : 復習テスト 4

学籍番号 _____ 氏名 _____

2020 年 5 月 19 日

注意：正答に修正した上で，復習テスト 1~8 を（左上で）ホチキス止めし，中間試験実施日（6 月 16 日の予定）にまとめて提出すること。すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。

1. (X, Y) を確率ベクトルとする。以下の公式を示しなさい。

(a)

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

(b)

$$\text{var}(aX + bY) = a^2 \text{var}(X) + 2ab \text{cov}(X, Y) + b^2 \text{var}(Y)$$

(c)

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

2. (X, Y) を確率ベクトルとする. 以下の命題を証明しなさい.

(a)

$$E(E(X|Y)) = E(X)$$

(b)

$$E(X|Y) = 0 \implies E(XY) = 0$$

(c)

$$E(X|Y) = 0 \implies \text{cov}(X, Y) = 0$$

3. X と Y は独立とする. このとき以下の式が成り立つことを示しなさい.

(a)

$$E(XY) = E(X) E(Y)$$

(b)

$$\text{cov}(X, Y) = 0$$

(c)

$$\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y)$$

解答例

1. (a) (X, Y) が連続なら

$$\begin{aligned} E(aX + bY) &:= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (ax + by) f_{X,Y}(x, y) dx dy \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X,Y}(x, y) dx dy + b \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f_{X,Y}(x, y) dx dy \\ &= a E(X) + b E(Y) \end{aligned}$$

離散の場合も同様.

(b)

$$\begin{aligned} \text{var}(aX + bY) &:= E((aX + bY - E(aX + bY))^2) \\ &= E([a(X - E(X)) + b(Y - E(Y))]^2) \\ &= E(a^2(X - E(X))^2) + 2E(a(X - E(X))b(Y - E(Y))) + E(b^2(Y - E(Y))^2) \\ &= a^2 E((X - E(X))^2) + 2ab E((X - E(X))(Y - E(Y))) + b^2 E((Y - E(Y))^2) \\ &= a^2 \text{var}(X) + 2ab \text{cov}(X, Y) + b^2 \text{var}(Y) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &:= E((X - E(X))(Y - E(Y))) \\ &= E(XY - X E(Y) - E(X)Y + E(X) E(Y)) \\ &= E(XY) - E(X) E(Y) - E(X) E(Y) + E(X) E(Y) \\ &= E(XY) - E(X) E(Y) \end{aligned}$$

2. (a)

$$\begin{aligned} E(E(X|Y)) &:= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y) dx f_Y(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} dx f_Y(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X,Y}(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X,Y}(x, y) dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} E(XY) &= E(E(XY|Y)) \\ &= E(E(X|Y)Y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} E(X) &= E(E(X|Y)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

3. (a) (X, Y) が連続なら

$$\begin{aligned} E(XY) &:= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_X(x) f_Y(y) \, dx \, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \, dx \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) \, dy \\ &= E(X) E(Y) \end{aligned}$$

離散の場合も同様.

(b) 前問の結果より

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= E(X)E(Y) - E(X)E(Y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(c) 前問の結果より

$$\begin{aligned} \text{var}(X + Y) &= \text{var}(X) + 2 \text{cov}(X, Y) + \text{var}(Y) \\ &= \text{var}(X) + \text{var}(Y) \end{aligned}$$