計量経済 I：復習テスト 6

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2020 年 5 月 26 日

注意：正答に修正した上で，復習テスト 1〜8 を（左上で）ホチキス止めし，中間試験実施日（6 月 16 日の予定）にまとめて提出すること．すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．

1. 2 変量データを $((y_1, x_1), \ldots, (y_n, x_n))$ とする．y_i の x_i 上への単回帰モデルは

$$\mathrm{E}(y_i|x_i) = \alpha + \beta x_i$$

回帰の誤差項は $u_i := y_i - \mathrm{E}(y_i|x_i)$．以下の式を証明しなさい．

（a）

$$\mathrm{E}(u_i|x_i) = 0$$

（b）

$$\mathrm{E}(u_i) = 0$$

（c）

$$\mathrm{E}(x_i u_i) = 0$$

（d）

$$\mathrm{cov}(x_i, u_i) = 0$$

（e）

$$\mathrm{cov}(x_i, y_i) = \beta \,\mathrm{var}(x_i)$$

2. 次の OLS 問題を考える．

$$\min_{a,b} \quad \sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)^2$$
$$\text{and} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

OLS 問題の解を (a^*, b^*)，OLS 残差を $e_i := y_i - a^* - b^* x_i$ とする．また $((y_1, x_1), \ldots, (y_n, x_n))$ の標本平均を $(\bar{y}, \bar{x})$ とする．以下の式を証明しなさい．

（a）

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = 0$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = 0$$

（b）

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})e_i = 0$$

（c）

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = {b^*}^2 \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

解答例

1. (a) 期待値の線形性より

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(u_i|x_i) &= \mathrm{E}(y_i - \mathrm{E}(y_i|x_i)|x_i) \\ &= \mathrm{E}(y_i|x_i) - \mathrm{E}(y_i|x_i) \\ &= 0\end{aligned}$$

(b) 繰り返し期待値の法則より

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(u_i) &= \mathrm{E}(\mathrm{E}(u_i|x_i)) \\ &= 0\end{aligned}$$

(c) 繰り返し期待値の法則より

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(x_i u_i) &= \mathrm{E}(\mathrm{E}(x_i u_i|x_i)) \\ &= \mathrm{E}(x_i \mathrm{E}(u_i|x_i)) \\ &= 0\end{aligned}$$

(d) 前 2 問より

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(x_i, u_i) &= \mathrm{E}(x_i u_i) - \mathrm{E}(x_i)\mathrm{E}(u_i) \\ &= 0\end{aligned}$$

(e) 前問より

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(x_i, y_i) &:= \mathrm{E}((x_i - \mathrm{E}(x_i))(y_i - \mathrm{E}(y_i))) \\ &= \mathrm{E}((x_i - \mathrm{E}(x_i))(\mathrm{E}(y_i|x_i) + u_i - \mathrm{E}(\mathrm{E}(y_i|x_i) + u_i))) \\ &= \mathrm{E}((x_i - \mathrm{E}(x_i))(\alpha + \beta x_i + u_i - \mathrm{E}(\alpha + \beta x_i + u_i))) \\ &= \mathrm{E}((x_i - \mathrm{E}(x_i))[\beta(x_i - \mathrm{E}(\beta x_i)) + u_i]) \\ &= \mathrm{E}\left(\beta(x_i - \mathrm{E}(x_i))^2 + (x_i - \mathrm{E}(\beta x_i))u_i\right) \\ &= \beta \mathrm{E}\left((x_i - \mathrm{E}(x_i))^2\right) + \mathrm{E}((x_i - \mathrm{E}(\beta x_i))u_i) \\ &= \beta \operatorname{var}(x_i) + \operatorname{cov}(x_i, u_i) \\ &= \beta \operatorname{var}(x_i)\end{aligned}$$

2. (a) 1 階の条件より

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - a^* - b^* x_i) = 0$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - a^* - b^* x_i) = 0$$

すなわち

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = 0$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = 0$$

（b）

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})e_i &= \sum_{i=1}^{n}x_ie_i-\bar{x}\sum_{i=1}^{n}e_i \\ &= 0\end{aligned}$$

（c）$y_i = a^* + b^*x_i + e_i$ より

$$\begin{aligned}\bar{y} &:= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a^*+b^*x_i+e_i) \\ &= a^*+b^*\bar{x}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2 &= \sum_{i=1}^{n}[b^*(x_i-\bar{x})+e_i]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[{b^*}^2(x_i-\bar{x})^2+2b^*(x_i-\bar{x})e_i+e_i^2\right] \\ &= {b^*}^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+2b^*\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})e_i+\sum_{i=1}^{n}e_i^2\end{aligned}$$

第 2 項は 0.