

## 計量経済 I : 復習テスト 10

学籍番号 \_\_\_\_\_ 氏名 \_\_\_\_\_

2020 年 6 月 27 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。正答に修正した上で、復習テスト 9~14 を（左上で）ホチキス止めし、定期試験実施日（7 月 28 日の予定）にまとめて提出すること。

1.  $((y_1, x_1), \dots, (y_n, x_n))$  を無作為標本とする。  $y_i$  の  $x_i$  上への定数項のない単回帰モデルは

$$y_i = \beta x_i + u_i$$
$$E(u_i | x_i) = 0$$

$\beta$  の OLS 推定量を  $b_n$  とする。

- (a)  $\sqrt{n}(b_n - \beta)$  が次のように表現できることを示しなさい。

$$\sqrt{n}(b_n - \beta) = \frac{(1/\sqrt{n}) \sum_{i=1}^n x_i u_i}{(1/n) \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

- (b)  $\sqrt{n}(b_n - \beta)$  の分布が次の正規分布で近似できる理由を説明しなさい。

$$\sqrt{n}(b_n - \beta) \stackrel{a}{\sim} N\left(0, \frac{\text{var}(x_i u_i)}{E(x_i^2)^2}\right)$$

- (c) 次式を示しなさい。

$$\text{var}(x_i u_i) = E(x_i^2 u_i^2)$$

- (d)  $\text{var}(x_i u_i)$  の White の推定量を与えなさい。

2.  $((y_1, x_1), \dots, (y_n, x_n))$  を無作為標本とする。次のような  $y_i$  の  $x_i$  上への条件つき不均一分散をもつ単回帰モデルを仮定する。

$$\begin{aligned}y_i &= \alpha + \beta x_i + u_i \\E(u_i|x_i) &= 0 \\ \text{var}(u_i|x_i) &= \sigma^2 \exp(\gamma x_i)\end{aligned}$$

- (a) 条件つき不均一分散の検定問題を定式化しなさい。

- (b) 次式を示しなさい。

$$\text{var}(u_i|x_i) = E(u_i^2|x_i)$$

- (c)  $H_0$  の下で次式を示しなさい。

$$E(u_i^2 - \sigma^2|x_i) = 0$$

- (d) Breusch-Pagan による条件つき不均一分散の検定方法を直感的に説明しなさい。

解答例

1. (a)  $\beta$  の OLS 推定量は

$$b_n = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$y_i = \beta x_i + u_i$  を代入すると

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i (\beta x_i + u_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\ &= \beta + \frac{\sum_{i=1}^n x_i u_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \end{aligned}$$

式変形すると

$$\sqrt{n}(b_n - \beta) = \frac{(1/\sqrt{n}) \sum_{i=1}^n x_i u_i}{(1/n) \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

(b) 分母は大数の法則より

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = E(x_i^2)$$

分子は  $E(u_i | x_i) = 0 \implies E(x_i u_i) = 0$  なので中心極限定理より

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n x_i u_i \xrightarrow{d} N(0, \text{var}(x_i u_i))$$

したがって極限において正規分布の線形変換となっているので

$$\frac{(1/\sqrt{n}) \sum_{i=1}^n x_i u_i}{(1/n) \sum_{i=1}^n x_i^2} \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{\text{var}(x_i u_i)}{E(x_i^2)^2}\right)$$

この極限分布で  $\sqrt{n}(b_n - \beta)$  の分布を近似する。

(c) 繰り返し期待値の法則より

$$\begin{aligned} E(x_i u_i) &= E(E(x_i u_i | x_i)) \\ &= E(x_i E(u_i | x_i)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \text{var}(x_i u_i) &= E((x_i u_i)^2) - E(x_i u_i)^2 \\ &= E((x_i u_i)^2) \\ &= E(x_i^2 u_i^2) \end{aligned}$$

(d)

$$\hat{\text{var}}(x_i u_i) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 e_i^2$$

2. (a) 条件つき不均一分散の検定問題は

$$H_0 : \gamma = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \gamma \neq 0$$

(b)

$$\begin{aligned}\text{var}(u_i|x_i) &:= \text{E}((u_i - \text{E}(u_i|x_i))^2|x_i) \\ &= \text{E}(u_i^2|x_i)\end{aligned}$$

(c) 前問より

$$\text{E}(u_i^2|x_i) = \sigma^2 \exp(\gamma x_i)$$

$H_0$  の下で

$$\text{E}(u_i^2|x_i) = \sigma^2$$

すなわち

$$\text{E}(u_i^2 - \sigma^2|x_i) = 0$$

(d) 前問より  $u_i^2 - \sigma^2$  の  $x_i$  上への回帰の回帰係数は  $H_0$  の下で 0.  $(\alpha, \beta)$  の OLS 推定量を  $(a, b)$ , OLS 残差を  $e_i := y_i - a - bx_i$ ,  $H_0$  の下での誤差分散の推定量を  $\hat{\sigma}^2 := (1/n) \sum_{i=1}^n e_i^2$  とする. Breusch-Pagan の検定では  $u_i^2 - \sigma^2$  の代わりに  $e_i^2 - \hat{\sigma}^2$  を  $x_i$  に回帰して回帰係数が 0 かどうかを検定する.