

計量経済 I : 復習テスト 13

学籍番号 _____ 氏名 _____

2020 年 7 月 14 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。正答に修正した上で，復習テスト 9～14 を（左上で）ホチキス止めし，定期試験実施日（7 月 28 日の予定）にまとめて提出すること。

1. (X, Y, Z) を確率ベクトルとする。以下を示しなさい。

(a) X と Y は独立 $\implies X$ は Y と平均独立

(b) X は Y と平均独立 $\implies X$ と Y は無相関

(c) Z を所与として X と Y は条件付き独立 $\implies Z$ を所与として X は Y と条件付き平均独立

2. 処置ダミーを D , 処置をする時としない時の潜在的な結果を (Y_1^*, Y_0^*) , 共変量を X , 傾向スコアを $p(X) := \Pr[D = 1|X]$ とする. X を所与として (Y_1^*, Y_0^*) と D が条件付き独立なら, $p(X)$ を所与としても両者は条件付き独立であることを示したい. すなわち

$$\Pr[D = 1|Y_1^*, Y_0^*, X] = \Pr[D = 1|X] \implies \Pr[D = 1|Y_1^*, Y_0^*, p(X)] = \Pr[D = 1|p(X)]$$

以下を順に示しなさい.

(a)

$$\Pr[D = 1|Y_1^*, Y_0^*, X] = \Pr[D = 1|X] \implies E(D|Y_1^*, Y_0^*, X) = p(X)$$

(b)

$$E(D|Y_1^*, Y_0^*, X) = p(X) \implies E(D|Y_1^*, Y_0^*, p(X)) = p(X)$$

(c)

$$E(D|Y_1^*, Y_0^*, p(X)) = p(X) \implies \Pr[D = 1|Y_1^*, Y_0^*, p(X)] = \Pr[D = 1|p(X)]$$

解答例

1. (a) 独立性の定義より

$$\begin{aligned} E(X|Y) &:= \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \\ &= E(X) \end{aligned}$$

(b) 繰り返し期待値の法則より

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= E(E(XY|Y)) - E(X)E(Y) \\ &= E(E(X|Y)Y) - E(X)E(Y) \\ &= E(E(X)Y) - E(X)E(Y) \\ &= E(X)E(Y) - E(X)E(Y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(c) 条件付き独立性の定義より

$$\begin{aligned} E(X|Y, Z) &:= \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y, Z}(x|y, z) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Z}(x|z) dx \\ &= E(X|Z) \end{aligned}$$

2. (a) 期待値の定義より

$$\begin{aligned} E(D|Y_1^*, Y_0^*, X) &:= 1 \cdot \Pr[D = 1|Y_1^*, Y_0^*, X] + 0 \cdot \Pr[D = 0|Y_1^*, Y_0^*, X] \\ &= \Pr[D = 1|Y_1^*, Y_0^*, X] \\ &= \Pr[D = 1|X] \\ &= p(X) \end{aligned}$$

(b) 繰り返し期待値の法則より

$$\begin{aligned} E(D|Y_1^*, Y_0^*, p(X)) &= E(E(D|Y_1^*, Y_0^*, X)|Y_1^*, Y_0^*, p(X)) \\ &= E(p(X)|Y_1^*, Y_0^*, p(X)) \\ &= p(X) \end{aligned}$$

(c) 前問より

$$\begin{aligned} \Pr[D = 1|Y_1^*, Y_0^*, p(X)] &= E(D|Y_1^*, Y_0^*, p(X)) \\ &= p(X) \\ &= \Pr[D = 1|X] \end{aligned}$$