

第2回 季節性・トレンド・構造変化 (2.3.1, 4.3.3)

村澤 康友

2020年10月6日

今日のポイント

1. 時系列から特定の成分を取り出す（取り除く）手法をフィルターという。
2. 時系列における季節特有の変動を季節性（季節変動）という。時系列から季節性を取り除くことを季節調整という。季節ダミー・季節階差・その他の様々な季節調整法がある。
3. 時系列の長期的な傾向をトレンドという。時点 t の n 次多項式で表すトレンドを n 次トレンドという。時系列を滑らかにしてトレンドを求めることを平滑化という。移動平均など様々な平滑化法がある。
4. 時系列（確率過程）の特性の予期せぬ変化を構造変化という。構造変化ダミーで構造変化を調整する。

目次

1	フィルター	1
2	季節性	1
2.1	季節調整 (p. 37)	1
2.2	季節ダミー	1
2.3	季節階差	2
3	トレンドと平滑化	2
3.1	多項式トレンド	2
3.2	階差	2
3.3	平滑化	2

4	構造変化	4
4.1	構造変化ダミー	4
4.2	回帰モデル (p. 80)	4
5	今日のキーワード	4
6	次回までの準備	4

1 フィルター

必要なら時系列 $\{y_t\}$ を季節特有の変動 $\{S_t\}$, 長期的な傾向 $\{T_t\}$, 短期的な循環変動 $\{C_t\}$, 不規則変動 $\{E_t\}$ に分解する。すなわち

$$y_t = S_t + T_t + C_t + E_t$$

$\{T_t\}$ は長期予測, $\{C_t\}$ は短期予測に役立つ。

定義 1. 時系列から特定の成分を取り出す（取り除く）手法をフィルターという。

2 季節性

2.1 季節調整 (p. 37)

日本の月次の所得は6月と12月が多いなど、月次・四半期系列は季節特有の変動を含む。

定義 2. 時系列における季節特有の変動を季節性（季節変動）という。

定義 3. 時系列から季節性を取り除くことを季節調整という。

注 1. 様々な季節調整法がある。季節性に関心がない場合、時系列を季節調整してから分析する。

2.2 季節ダミー

季節性の周期を J とする。

定義 4. j 番目の季節ダミーは

$$D_t^j := \begin{cases} 1 & t \text{ は } j \text{ 番目の季節} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

例 1. 四半期系列なら第 1 四半期～第 4 四半期ダミー. 月次系列なら 1 月～12 月ダミー.

注 2. 季節変動は次のように表せる.

$$S_t = \beta_1 D_t^1 + \cdots + \beta_J D_t^J$$

$(\beta_1, \dots, \beta_J)$ は OLS で推定できる. ただし定数項があると多重共線性が生じる. その場合は季節ダミーを 1 つ落とす.

2.3 季節階差

季節変動は季節ダミーで OLS 推定できるが, 季節階差で消してもよい.

定義 5. 周期 J の季節性をもつ時系列 $\{y_t\}$ の季節階差系列は $\{\Delta_J y_t\}$.

注 3. Δ_J は (後退) 季節階差演算子. すなわち $\Delta_J y_t := y_t - y_{t-J}$.

定理 1.

$$S_t := \beta_1 D_t^1 + \cdots + \beta_J D_t^J \implies \Delta_J S_t = 0$$

証明.

$$\begin{aligned} \Delta_J S_t &:= S_t - S_{t-J} \\ &= \beta_1 D_t^1 + \cdots + \beta_J D_t^J \\ &\quad - (\beta_1 D_{t-J}^1 + \cdots + \beta_J D_{t-J}^J) \\ &= \beta_1 (D_t^1 - D_{t-J}^1) + \cdots \\ &\quad + \beta_J (D_t^J - D_{t-J}^J) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

例 2. スイスの医薬品販売額の前系列・対数系列・対数階差・対数季節階差 (図 1).

3 トрендと平滑化

3.1 多項式トレンド

定義 6. 時系列の長期的な傾向をトレンドという.

定義 7. 時点 t の n 次多項式で表すトレンドを n 次トレンドという.

注 4. すなわち

$$T_t := \beta_0 + \beta_1 t + \cdots + \beta_n t^n$$

$(\beta_0, \dots, \beta_n)$ は OLS で推定できる. また 1 次トレンド = 線形トレンド.

例 3. NYSE 総合指数 (対数値) の 1 次トレンドと残差 (図 2).

3.2 階差

n 次トレンドは OLS 推定できるが, n 階差で消してもよい.

例 4. $T_t := \beta_0 + \beta_1 t$ とすると

$$\begin{aligned} \Delta T_t &:= T_t - T_{t-1} \\ &= (\beta_0 + \beta_1 t) - [\beta_0 + \beta_1 (t-1)] \\ &= \beta_1 \end{aligned}$$

$T_t := \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$ とすると

$$\begin{aligned} \Delta T_t &:= T_t - T_{t-1} \\ &= (\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2) \\ &\quad - [\beta_0 + \beta_1 (t-1) + \beta_2 (t-1)^2] \\ &= \beta_1 + \beta_2 [t^2 - (t-1)^2] \\ &= \beta_1 + \beta_2 (2t-1) \\ \Delta^2 T_t &:= \Delta T_t - \Delta T_{t-1} \\ &= [\beta_1 + \beta_2 (2t-1)] \\ &\quad - \{\beta_1 + \beta_2 [2(t-1) - 1]\} \\ &= \beta_2 [(2t-1) - (2t-3)] \\ &= 2\beta_2 \end{aligned}$$

3.3 平滑化

定義 8. 時系列を滑らかにしてトレンドを求めることを平滑化という.

定義 9. 時系列の直近 n 期の観測値の平均を n 期 (単純) 移動平均という.

注 5. すなわち

$$T_t := \frac{y_t + \cdots + y_{t-n+1}}{n}$$

ただし T_1, \dots, T_{n-1} は求まらない.

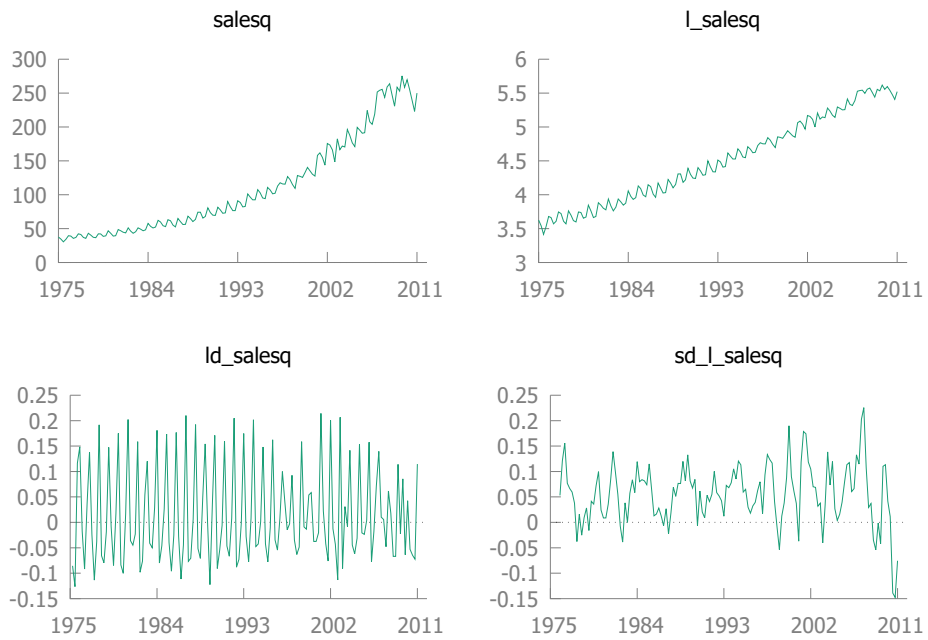


図1 スイスの医薬品販売額の原因系列・対数系列・対数階差・対数季節階差

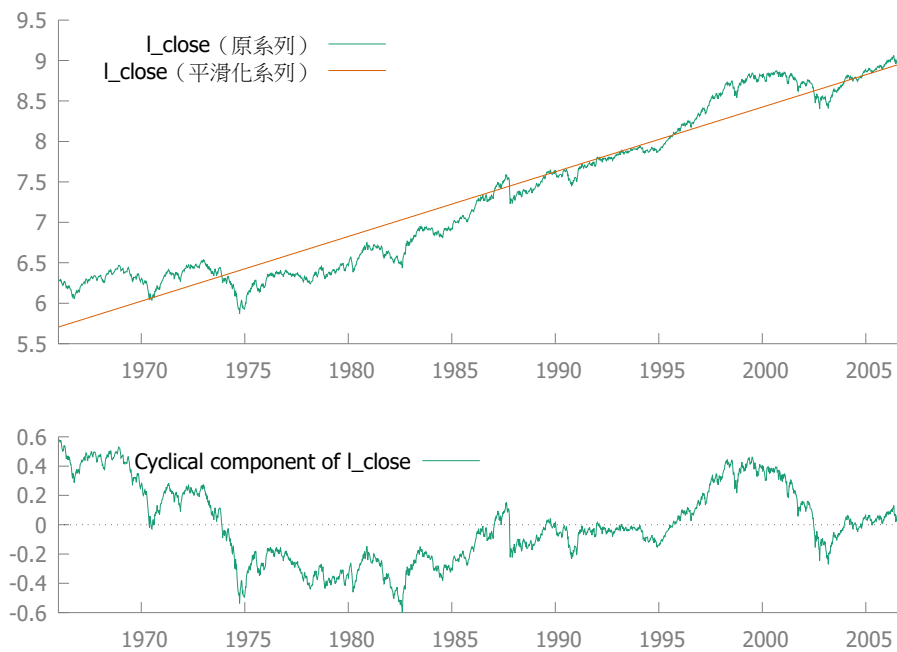


図2 NYSE 総合指数 (対数值) の1次トレンドと残差

注 6. 他にも様々な平滑化法がある.

4 構造変化

4.1 構造変化ダミー

オイル・ショックやバブル崩壊など大きなショックにより, ある時点を境に時系列(確率過程)の特性が大きく変化する場合がある. 確率過程 $\{Y_t\}$ の平均が時点 T で変化する場合は

$$E(Y_t) = \begin{cases} \mu_0 & \text{for } t < T \\ \mu_1 & \text{for } t \geq T \end{cases}$$

定義 10. 時系列(確率過程)の特性の予期せぬ変化を構造変化という.

定義 11. 時点 T の構造変化ダミーは

$$D_t := \begin{cases} 0 & \text{for } t < T \\ 1 & \text{for } t \geq T \end{cases}$$

注 7. 構造変化ダミーを用いると

$$\begin{aligned} E(Y_t) &= (1 - D_t)\mu_0 + D_t\mu_1 \\ &= \mu_0 + (\mu_1 - \mu_0)D_t \end{aligned}$$

$(\mu_0, \mu_1 - \mu_0)$ は OLS で推定できる.

4.2 回帰モデル (p. 80)

X_t を説明変数, Y_t を被説明変数とし, Y_t の X_t 上への単回帰モデルを考える. 時点 T で係数が変わる場合は

$$E(Y_t|X_t) = \begin{cases} \alpha_0 + \beta_0 X_t & \text{for } t < T \\ \alpha_1 + \beta_1 X_t & \text{for } t \geq T \end{cases}$$

構造変化ダミーを用いると

$$\begin{aligned} E(Y_t|X_t) &= \alpha_0 + (\alpha_1 - \alpha_0)D_t + [\beta_0 + (\beta_1 - \beta_0)D_t]X_t \\ &= \alpha_0 + (\alpha_1 - \alpha_0)D_t + \beta_0 X_t + (\beta_1 - \beta_0)D_t X_t \end{aligned}$$

すなわち $D_t, X_t, D_t X_t$ を説明変数として構造変化前後の係数を推定できる. また各係数の構造変化の有無の t 検定や F 検定(チョウ検定)も可能.

5 今日のキーワード

フィルター, 季節性(季節変動), 季節調整, 季節ダミー, 季節階差系列, トレンド, n 次トレンド, 平滑化, n 期(単純)移動平均, 構造変化, 構造変化ダミー

6 次回までの準備

提出 宿題 2

復習 教科書第 2 章 3 節, 第 4 章 3.3 節, 復習テスト 2

予習 教科書第 4 章 2.1 節, 第 7 章 1.1-1.2 節, 補論 A.2 節