第 4 回　ARMA 過程（7.2.1）

村澤 康友

2020 年 10 月 20 日

今日のポイント

1. 任意の t について $\mathrm{L}y_t := y_{t-1}$ なら L をラグ演算子という．ラグ演算子の多項式をラグ多項式という．
2. p 次の自己回帰（AR）過程は，任意の t について $\phi(\mathrm{L})(y_t-\mu)=w_t$，ただし $\phi(\mathrm{L})$ はラグ多項式で $\{w_t\}$ は WN．Yule–Walker 方程式は AR 係数と ACF の関係を与える．
3. q 次の移動平均（MA）過程は，任意の t について $y_t=\mu+\theta(\mathrm{L})w_t$，ただし $\theta(\mathrm{L})$ はラグ多項式で $\{w_t\}$ は WN．共分散定常過程は $\mathrm{MA}(\infty)$ で表現できる（Wold 分解）．$\mathrm{AR}(\infty)$ で表現できる MA 過程を反転可能という．
4. (p,q) 次の自己回帰移動平均（ARMA）過程は，任意の t について $\phi(\mathrm{L})(y_t-\mu)=\theta(\mathrm{L})w_t$．

目次

1 漸化式とラグ演算子

1.1 漸化式

$\{y_t\},\{w_t\}$ を数列とする．

定義 1. $\{y_t\}$ の p **階漸化式**は，任意の $t\geq 1$ について

$$y_t=f(y_{t-1},\dots,y_{t-p},w_t)$$

注 1. 初期値 $y_0,\dots,y_{-(p-1)}$ と非斉次項 $\{w_t\}$ で $\{y_t\}$ が一意に定まる．

定義 2. $\{y_t\}$ の p **階線形漸化式**は，任意の $t\geq 1$ について

$$y_t=\phi_1y_{t-1}+\cdots+\phi_py_{t-p}+w_t$$

1.2　ラグ演算子

定義 3. 任意の t について $\mathrm{L}y_t := y_{t-1}$ なら L を**ラグ演算子**という．

定義 4. ラグ演算子の多項式を**ラグ多項式**という．

注 2. p 次のラグ多項式は

$$\phi(\mathrm{L}) := 1 - \phi_1 \mathrm{L} - \cdots - \phi_p \mathrm{L}^p$$

任意の t について

$$\begin{aligned}\phi(\mathrm{L})y_t &= \left(1 - \phi_1 \mathrm{L} - \cdots - \phi_p \mathrm{L}^p\right) y_t \\ &= y_t - \phi_1 \mathrm{L} y_t - \cdots - \phi_p \mathrm{L}^p y_t \\ &= y_t - \phi_1 y_{t-1} - \cdots - \phi_p y_{t-p}\end{aligned}$$

したがって $\{y_t\}$ の p 階線形漸化式は，任意の $t \geq 1$ について

$$\phi(\mathrm{L})y_t = w_t$$

2　AR 過程

2.1　AR(1) 過程（p. 135）

$\{y_t\}$ を確率過程とする．

定義 5. 1 次の**自己回帰**（*autoregressive, AR*）**過程**は，任意の t について

$$\begin{aligned}\phi(\mathrm{L})(y_t - \mu) &= w_t \\ \{w_t\} &\sim \mathrm{WN}\left(\sigma^2\right)\end{aligned}$$

ただし $\phi(\mathrm{L}) := 1 - \phi \mathrm{L}$.

注 3. AR(1) と書く．

注 4. すなわち任意の t について

$$y_t - \mu = \phi(y_{t-1} - \mu) + w_t$$

または

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + w_t$$

ただし $c := (1 - \phi)\mu$.

例 1. $\mu := 0$，$\phi := 0.9$ の AR(1) のコレログラム（図 1）．

定理 1. $\{y_t\}$ が AR(1) で $|\phi| < 1$ なら任意の t について

$$\mathrm{E}(y_t) = \mu$$

証明. 逐次代入により，任意の t について

$$\begin{aligned}y_t - \mu &= \phi(y_{t-1} - \mu) + w_t \\ &= \phi[\phi(y_{t-2} - \mu) + w_{t-1}] + w_t \\ &= \dots \\ &= w_t + \phi w_{t-1} + \phi^2 w_{t-2} + \dots \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \phi^s w_{t-s}\end{aligned}$$

これは $|\phi| < 1$ なら収束．両辺の期待値をとると，任意の t について $\mathrm{E}(w_t) = 0$ なので

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(y_t - \mu) &= \mathrm{E}\left(\sum_{s=0}^{\infty} \phi^s w_{t-s}\right) \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \phi^s \, \mathrm{E}(w_{t-s}) \\ &= 0\end{aligned}$$

すなわち $\mathrm{E}(y_t - \mu) = 0$ より $\mathrm{E}(y_t) = \mu$. □

2.2　AR(p) 過程（p. 135）

定義 6. p 次の *AR* **過程**は，任意の t について

$$\begin{aligned}\phi(\mathrm{L})(y_t - \mu) &= w_t \\ \{w_t\} &\sim \mathrm{WN}\left(\sigma^2\right)\end{aligned}$$

ただし $\phi(\mathrm{L}) := 1 - \phi_1 \mathrm{L} - \cdots - \phi_p \mathrm{L}^p$.

注 5. AR(p) と書く．

注 6. すなわち任意の t について

$$y_t - \mu = \phi_1(y_{t-1} - \mu) + \cdots + \phi_p(y_{t-p} - \mu) + w_t$$

または

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + w_t$$

ただし $c := (1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p)\mu$.

2.3　共分散定常性

$\{y_t\}$ を AR(p) とする．

定理 2. p 次方程式 $\phi(z) = 0$ の p 個の根がすべて絶対値で *1* より大きいことが，AR(p) が共分散定常であるための必要十分条件．

証明. 省略（大学院レベル）． □

例 2. $p := 1$ なら $\phi(z) := 1 - \phi z$ より $\phi(z) = 0$ の根は $z = 1/\phi$．したがって $|z| > 1 \iff |\phi| < 1$.

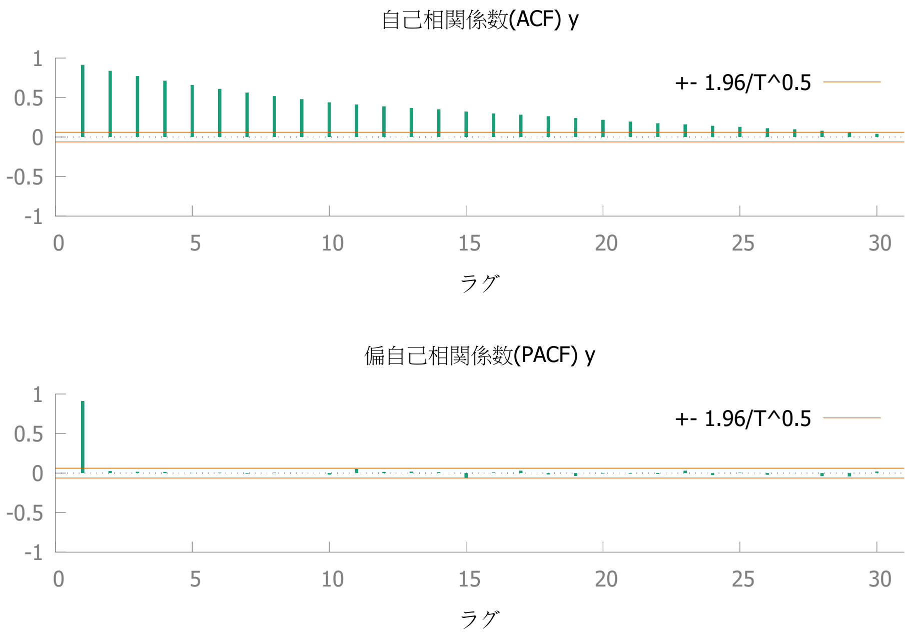

図 1　$\mu := 0$，$\phi := 0.9$ の AR(1) のコレログラム

2.4　自己共分散

$\{y_t\}$ を自己共分散関数 $\gamma(.)$ の共分散定常な AR(p) とする．

補題 1. 任意の t と $s \geq 1$ について

$$\mathrm{cov}(y_{t-s}, w_t) = 0$$

証明. 逐次代入により，任意の t について

$$\begin{aligned}
&y_t - \mu \\
&= \phi_1(y_{t-1} - \mu) + \cdots + \phi_p(y_{t-p} - \mu) + w_t \\
&= \phi_1[\phi_1(y_{t-2} - \mu) + \cdots + \phi_p(y_{t-p-1} - \mu) + w_{t-1}] \\
&\quad + \cdots + \phi_p(y_{t-p} - \mu) + w_t \\
&= \ldots \\
&= w_t + \phi_1 w_{t-1} + \cdots
\end{aligned}$$

任意の t と $s \neq 0$ について $\mathrm{cov}(w_t, w_{t-s}) = 0$ なので，$s \geq 1$ について

$$\begin{aligned}
&\mathrm{cov}(y_{t-s}, w_t) \\
&= \mathrm{cov}(w_{t-s} + \phi_1 w_{t-s-1} + \cdots, w_t) \\
&= \mathrm{cov}(w_{t-s}, w_t) + \phi_1 \mathrm{cov}(w_{t-s-1}, w_t) + \cdots \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

補題 2. 任意の t について

$$\mathrm{cov}(y_t, w_t) = \sigma^2$$

証明. 任意の t について $\mathrm{var}(w_t) = \sigma^2$ なので，前補題より

$$\begin{aligned}
&\mathrm{cov}(y_t, w_t) \\
&= \mathrm{cov}(c + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + w_t, w_t) \\
&= \mathrm{cov}(\phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + w_t, w_t) \\
&= \phi_1 \mathrm{cov}(y_{t-1}, w_t) + \cdots + \phi_p \mathrm{cov}(y_{t-p}, w_t) \\
&\quad + \mathrm{var}(w_t) \\
&= \sigma^2
\end{aligned}$$

□

定理 3.

$$\begin{aligned}
\gamma(0) &= \phi_1\gamma(1) + \cdots + \phi_p\gamma(p) + \sigma^2 \\
\gamma(1) &= \phi_1\gamma(0) + \cdots + \phi_p\gamma(p-1) \\
&\vdots \\
\gamma(p) &= \phi_1\gamma(p-1) + \cdots + \phi_p\gamma(0) \\
\gamma(s) &= \phi_1\gamma(s-1) + \cdots + \phi_p\gamma(s-p), \quad s \geq p+1
\end{aligned}$$

証明. 前補題より

$$
\begin{aligned}
\gamma(0) &:= \operatorname{var}(y_t) \\
&= \operatorname{cov}(y_t, y_t) \\
&= \operatorname{cov}(y_t, c + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + w_t) \\
&= \operatorname{cov}(y_t, \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + w_t) \\
&= \phi_1 \operatorname{cov}(y_t, y_{t-1}) + \cdots + \phi_p \operatorname{cov}(y_t, y_{t-p}) \\
&\quad + \operatorname{cov}(y_t, w_t) \\
&= \phi_1 \gamma(1) + \cdots + \phi_p \gamma(p) + \sigma^2
\end{aligned}
$$

前々補題より

$$
\begin{aligned}
\gamma(1) &:= \operatorname{cov}(y_t, y_{t-1}) \\
&= \operatorname{cov}(c + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + w_t, y_{t-1}) \\
&= \operatorname{cov}(\phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + w_t, y_{t-1}) \\
&= \phi_1 \operatorname{cov}(y_{t-1}, y_{t-1}) + \cdots \\
&\quad + \phi_p \operatorname{cov}(y_{t-p}, y_{t-1}) + \operatorname{cov}(w_t, y_{t-1}) \\
&= \phi_1 \gamma(0) + \cdots + \phi_p \gamma(p-1)
\end{aligned}
$$

$\gamma(2)$ 以降も同様. □

2.5 自己相関

$\{y_t\}$ の ACF を $\rho(.)$ とする.

定理 4 (Yule–Walker 方程式)**.**

$$
\begin{aligned}
\rho(1) &= \phi_1 \rho(0) + \cdots + \phi_p \rho(p-1) \\
&\vdots \\
\rho(p) &= \phi_1 \rho(p-1) + \cdots + \phi_p \rho(0)
\end{aligned}
$$

証明. $s \geq 0$ について $\rho(s) = \gamma(s)/\gamma(0)$ なので，前定理より結果が得られる. □

注 7. $(\phi_1, \ldots, \phi_p)$ と $\rho(1), \ldots, \rho(p)$ の関係を与える連立方程式.

系 1. $s \geq p+1$ について

$$\rho(s) = \phi_1 \rho(s-1) + \cdots + \phi_p \rho(s-p)$$

証明. 前定理と同じ. □

注 8. すなわち $\{\rho(s)\}$ は初期値 $\rho(1), \ldots, \rho(p)$ の p 階線形漸化式.

2.6 偏自己相関

$\{y_t\}$ の PACF を $\alpha(.)$ とする.

定理 5. $\{y_t\}$ が AR(p) なら $s \geq p+1$ について $\alpha(s) = 0$.

証明. AR(p) は $p+1$ 次以上の AR 係数が 0 の AR(∞). 偏回帰係数=0 $\Longleftrightarrow$ 偏相関係数=0 より AR 係数が 0 なら $\alpha(s) = 0$. □

3 MA 過程

3.1 MA(1) 過程（p. 135）

定義 7. 1 次の移動平均（*moving average, MA*）過程は，任意の t について

$$
\begin{aligned}
y_t &= \mu + \theta(\mathrm{L}) w_t \\
\{w_t\} &\sim \mathrm{WN}\left(\sigma^2\right)
\end{aligned}
$$

ただし $\theta(\mathrm{L}) := 1 - \theta \mathrm{L}$.

注 9. MA(1) と書く.

注 10. すなわち任意の t について

$$y_t = \mu + w_t - \theta w_{t-1}$$

例 3. $\mu := 0$，$\theta := 0.9$ の MA(1) のコレログラム（図 2）.

3.2 MA(q) 過程（p. 135）

定義 8. q 次の *MA* 過程は，任意の t について

$$
\begin{aligned}
y_t &= \mu + \theta(\mathrm{L}) w_t \\
\{w_t\} &\sim \mathrm{WN}\left(\sigma^2\right)
\end{aligned}
$$

ただし $\theta(\mathrm{L}) := 1 - \theta_1 \mathrm{L} - \cdots - \theta_q \mathrm{L}^q$.

注 11. MA(q) と書く.

注 12. すなわち任意の t について

$$y_t = \mu + w_t - \theta_1 w_{t-1} - \cdots - \theta_q w_{t-q}$$

定理 6. $\{y_t\}$ が MA(q) なら任意の t について

$$\mathrm{E}(y_t) = \mu$$

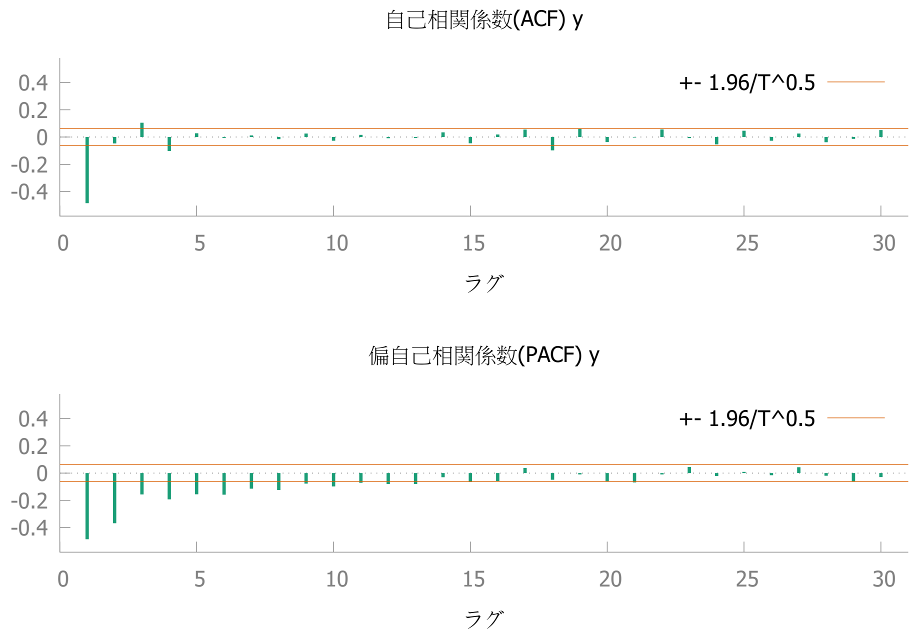

図 2　$\mu := 0$，$\theta := 0.9$ の MA(1) のコレログラム

証明．任意の t について $\mathrm{E}(w_t) = 0$ なので

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}(y_t)\\
&= \mathrm{E}(\mu + w_t - \theta_1 w_{t-1} - \cdots - \theta_q w_{t-q})\\
&= \mu + \mathrm{E}(w_t) - \theta_1 \mathrm{E}(w_{t-1}) - \cdots - \theta_q \mathrm{E}(w_{t-q})\\
&= \mu
\end{aligned}$$

□

3.3　Wold 分解（p. 135）

定理 7 (Wold 分解)**.** $\{y_t\}$ が平均 *0* で共分散定常なら，任意の t について

$$y_t = d_t + \sum_{s=0}^{\infty} \psi_s w_{t-s}$$

ただし $\{d_t\}$ は決定的，$\{w_t\}$ はホワイト・ノイズで $\{d_t\}$ と無相関.

証明．省略（大学院レベル）.　□

系 2. 純粋に非決定的な共分散定常過程は $\mathrm{MA}(\infty)$ として表現できる.

3.4　自己共分散

$\{y_t\}$ を自己共分散関数 $\gamma(.)$ の $\mathrm{MA}(q)$ とする.

補題 3. 任意の t について

$$\mathrm{var}(y_t) = \left(1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2\right) \sigma^2$$

証明．任意の t について $\mathrm{var}(w_t) = \sigma^2$ かつ $s \neq 0$ について $\mathrm{cov}(w_t, w_{t-s}) = 0$ なので

$$\begin{aligned}
&\mathrm{var}(y_t)\\
&= \mathrm{var}(\mu + w_t - \theta_1 w_{t-1} - \cdots - \theta_q w_{t-q})\\
&= \mathrm{var}(w_t - \theta_1 w_{t-1} - \cdots - \theta_q w_{t-q})\\
&= \mathrm{var}(w_t) + \theta_1^2 \mathrm{var}(w_{t-1}) + \cdots + \theta_q^2 \mathrm{var}(w_{t-q})\\
&= \left(1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2\right) \sigma^2
\end{aligned}$$

□

補題 4. $\{y_t\}$ が $\mathrm{MA}(q)$ なら任意の t と $s = 1, \ldots, q$ について

$$\mathrm{cov}(y_t, y_{t-s}) = (-\theta_s + \theta_{s+1}\theta_1 + \cdots + \theta_q \theta_{q-s})\sigma^2$$

証明．任意の t について $\mathrm{var}(w_t) = \sigma^2$ かつ $s \neq 0$

について $\mathrm{cov}(w_t, w_{t-s}) = 0$ なので

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{cov}(y_t, y_{t-1}) \\
&= \mathrm{cov}(\mu + w_t - \theta_1 w_{t-1} - \cdots - \theta_q w_{t-q}, \\
&\quad \mu + w_{t-1} - \theta_1 w_{t-2} - \cdots - \theta_q w_{t-1-q}) \\
&= \mathrm{cov}(w_t - \theta_1 w_{t-1} - \cdots - \theta_q w_{t-q}, \\
&\quad w_{t-1} - \theta_1 w_{t-2} - \cdots - \theta_q w_{t-1-q}) \\
&= \mathrm{cov}(w_t, w_{t-1} - \theta_1 w_{t-2} - \cdots - \theta_q w_{t-1-q}) \\
&\quad - \theta_1 \mathrm{cov}(w_{t-1}, w_{t-1} - \theta_1 w_{t-2} - \cdots - \theta_q w_{t-1-q}) \\
&\quad - \cdots \\
&\quad - \theta_q \mathrm{cov}(w_{t-q}, w_{t-1} - \theta_1 w_{t-2} - \cdots - \theta_q w_{t-1-q}) \\
&= -\theta_1 \mathrm{var}(w_{t-1}) + \theta_2\theta_1 \mathrm{var}(w_{t-2}) + \cdots \\
&\quad + \theta_q\theta_{q-1} \mathrm{var}(w_{t-q}) \\
&= (-\theta_1 + \theta_2\theta_1 + \cdots + \theta_q\theta_{q-1})\sigma^2
\end{aligned}
$$

$s = 2, \ldots, q$ についても同様. □

補題 5. $\{y_t\}$ が MA(q) なら任意の t と $s \geq q+1$ について

$$\mathrm{cov}(y_t, y_{t-s}) = 0$$

証明. 任意の t と $s \neq 0$ について $\mathrm{cov}(w_t, w_{t-s}) = 0$ なので, $s \geq q+1$ より

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{cov}(y_t, y_{t-s}) \\
&= \mathrm{cov}(\mu + w_t - \theta_1 w_{t-1} - \cdots - \theta_q w_{t-q}, \\
&\quad \mu + w_{t-s} - \theta_1 w_{t-s-1} - \cdots - \theta_q w_{t-s-q}) \\
&= \mathrm{cov}(w_t - \theta_1 w_{t-1} - \cdots - \theta_q w_{t-q}, \\
&\quad w_{t-s} - \theta_1 w_{t-s-1} - \cdots - \theta_q w_{t-s-q}) \\
&= \mathrm{cov}(w_t, w_{t-s} - \theta_1 w_{t-s-1} - \cdots - \theta_q w_{t-s-q}) \\
&\quad - \theta_1 \mathrm{cov}(w_{t-1}, w_{t-s} - \theta_1 w_{t-s-1} - \cdots - \theta_q w_{t-s-q}) \\
&\quad - \cdots \\
&\quad - \theta_q \mathrm{cov}(w_{t-q}, w_{t-s} - \theta_1 w_{t-s-1} - \cdots - \theta_q w_{t-s-q}) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

□

定理 8. MA(q) の自己共分散関数は

$$
\begin{aligned}
\gamma(0) &= \left(1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2\right)\sigma^2 \\
\gamma(1) &= (-\theta_1 + \theta_2\theta_1 + \cdots + \theta_q\theta_{q-1})\sigma^2 \\
&\vdots \\
\gamma(q) &= -\theta_q\sigma^2 \\
\gamma(s) &= 0, \quad s \geq q+1
\end{aligned}
$$

証明. 前 3 補題より結果が得られる. □

3.5 自己相関

$\{y_t\}$ の ACF を $\rho(.)$ とする.

系 3.

$$
\begin{aligned}
\rho(1) &= \frac{-\theta_1 + \theta_2\theta_1 + \cdots + \theta_q\theta_{q-1}}{1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2} \\
&\vdots \\
\rho(q) &= \frac{-\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2} \\
\rho(s) &= 0, \quad s \geq q+1
\end{aligned}
$$

証明. $s \geq 0$ について $\rho(s) = \gamma(s)/\gamma(0)$ なので, 前定理より結果が得られる. □

3.6 反転可能性

定理 9. 次の *2* つの MA(1) は同じ自己共分散関数をもつ.

1. 任意の t について

$$
\begin{aligned}
y_t &= \mu + w_t - \theta w_{t-1} \\
\{w_t\} &\sim \mathrm{WN}\left(\sigma^2\right)
\end{aligned}
$$

2. 任意の t について

$$
\begin{aligned}
y_t^* &= \mu + w_t^* - \theta^{-1} w_{t-1}^* \\
\{w_t^*\} &\sim \mathrm{WN}\left(\theta^2\sigma^2\right)
\end{aligned}
$$

証明. 前者の自己共分散関数は

$$
\begin{aligned}
\gamma(0) &= \left(1 + \theta^2\right)\sigma^2 \\
\gamma(1) &= -\theta\sigma^2 \\
\gamma(s) &= 0, \quad s \geq 2
\end{aligned}
$$

θ を θ^{-1} に, σ^2 を $\theta^2\sigma^2$ に置き換えると

$$
\begin{aligned}
\gamma^*(0) &= \left(1 + \theta^{-2}\right)\theta^2\sigma^2 \\
&= \left(1 + \theta^2\right)\sigma^2 \\
\gamma^*(1) &= -\theta^{-1}\theta^2\sigma^2 \\
&= -\theta\sigma^2 \\
\gamma^*(s) &= 0, \quad s \geq 2
\end{aligned}
$$

したがって $\gamma(.) = \gamma^*(.)$. □

定理 10. $|\theta| < 1$ なら MA(1) は AR(∞) で表現できる.

証明. 逐次代入により，任意の t について

$$\begin{aligned} w_t &= y_t - \mu + \theta w_{t-1} \\ &= y_t - \mu + \theta(y_{t-1} - \mu + \theta w_{t-2}) \\ &= \dots \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \theta^s (y_{t-s} - \mu) \end{aligned}$$

すなわち任意の t について

$$y_t - \mu = -\sum_{s=1}^{\infty} \theta^s (y_{t-s} - \mu) + w_t$$

右辺の収束の必要十分条件は $|\theta| < 1$. □

定義 9. $\mathrm{AR}(\infty)$ で表現できる MA 過程を**反転可能**という.

定理 11. q 次方程式 $\theta(z) = 0$ の q 個の根がすべて絶対値で *1* より大きいことが，$\mathrm{MA}(q)$ が反転可能であるための必要十分条件.

証明. 省略（大学院レベル）. □

3.7 偏自己相関

$\{y_t\}$ の PACF を $\alpha(.)$ とする.

定理 12. $\{y_t\}$ が反転可能なら一般に $\alpha(s) \neq 0$.

証明. 反転可能な MA 過程は $\mathrm{AR}(\infty)$ で表現できる．偏回帰係数=0 $\Longleftrightarrow$ 偏相関係数=0 より AR 係数が 0 でない限り $\alpha(s) \neq 0$. □

4 ARMA 過程

4.1 $\mathrm{ARMA}(1,1)$ 過程（p. 136）

定義 10. $(1,1)$ 次の**自己回帰移動平均**（*autoregressive moving average, ARMA*）**過程**は，任意の t について

$$\begin{aligned} \phi(\mathrm{L})(y_t - \mu) &= \theta(\mathrm{L}) w_t \\ \{w_t\} &\sim \mathrm{WN}\left(\sigma^2\right) \end{aligned}$$

ただし $\phi(\mathrm{L}) := 1 - \phi\mathrm{L}$，$\theta(\mathrm{L}) := 1 - \theta\mathrm{L}$.

注 13. $\mathrm{ARMA}(1,1)$ と書く.

注 14. すなわち任意の t について

$$y_t - \mu = \phi(y_{t-1} - \mu) + w_t - \theta w_{t-1}$$

または

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + w_t - \theta w_{t-1}$$

ただし $c := (1 - \phi)\mu$.

注 15. $\phi = \theta$ なら両辺を $\phi(\mathrm{L}) = \theta(\mathrm{L})$ で割ると，任意の t について

$$y_t - \mu = w_t$$

例 4. $\mu := 0$，$\phi := 0.9$，$\theta := 0.9$ の ARMA(1,1) のコレログラム（図 3）.

4.2 $\mathrm{ARMA}(p,q)$ 過程（p. 136）

定義 11. (p,q) 次の *ARMA* **過程**は，任意の t について

$$\begin{aligned} \phi(\mathrm{L})(y_t - \mu) &= \theta(\mathrm{L}) w_t \\ \{w_t\} &\sim \mathrm{WN}\left(\sigma^2\right) \end{aligned}$$

ただし $\phi(\mathrm{L}) := 1 - \phi_1\mathrm{L} - \dots - \phi_p\mathrm{L}^p$，$\theta(\mathrm{L}) := 1 - \theta_1\mathrm{L} - \dots - \theta_q\mathrm{L}^q$.

注 16. $\mathrm{ARMA}(p,q)$ と書く.

5 今日のキーワード

漸化式，線形漸化式，ラグ演算子，ラグ多項式，自己回帰（AR）過程，Yule–Walker 方程式，移動平均（MA）過程，Wold 分解，反転可能性，自己回帰移動平均（ARMA）過程

6 次回までの準備

提出　宿題 4

復習　教科書第 7 章 2.1 節

予習　教科書第 7 章 1.3, 2.2–2.3 節

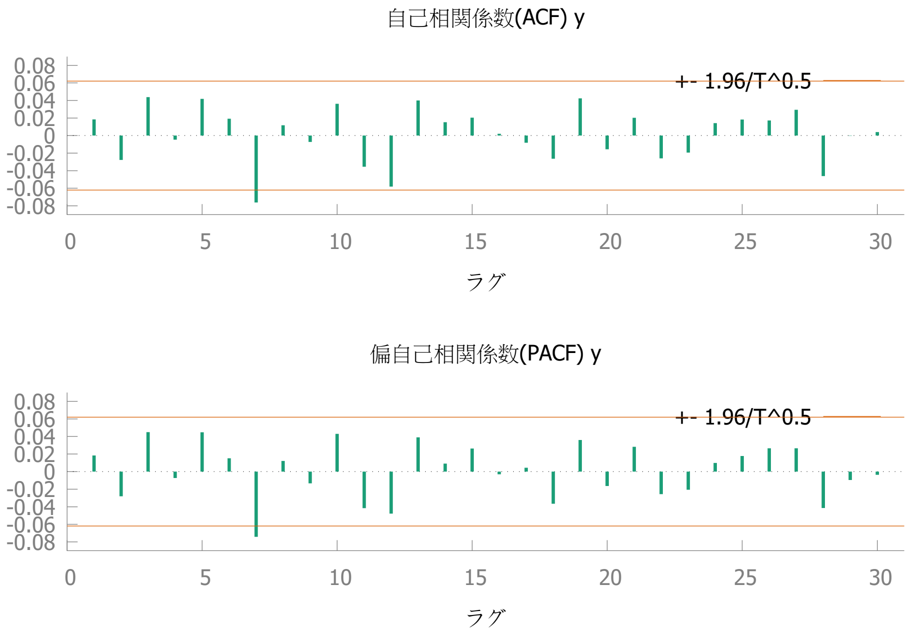

図 3　$\mu := 0$，$\phi := 0.9$，$\theta := 0.9$ の ARMA(1,1) のコレログラム