第 6 回　予測

村澤 康友

2020 年 11 月 10 日

今日のポイント

1. 真の値の代わりに予測値・推定値を用いることの損失を表す関数を損失関数という．予測子の損失の（条件付き）期待値を与える関数を危険（リスク）関数という．危険関数が最小の予測子が最適．したがって最適予測は損失関数に依存する．
2. 予測誤差の 2 乗の（条件付き）期待値を予測子の平均 2 乗誤差（MSE）という．MSE = 2 次の損失の危険関数．2 次の損失なら条件付き期待値が最適予測．
3. 2 次の損失なら最適な h 期先予測値は $\mathrm{E}_t(y_{t+h})$．$\mathrm{var}_t(y_{t+h})$ から予測の信頼区間を作成する．

目次

1　統計的意思決定

1.1　損失関数

確率過程 $\{Y_t\}$ の h 期先予測を考える．時点 t までの観測値を所与とした Y_{t+h} の予測子を $\hat{Y}_{t+h|t}$ と書く．

定義 1. 真の値の代わりに予測値・推定値を用いることの損失を表す関数を**損失関数**という．

注 1. 経済学における効用関数と同じ（符号は逆）．

注 2. $L\left(Y_{t+h}, \hat{Y}_{t+h|t}\right)$ と書く．$\hat{Y}_{t+h|t} = Y_{t+h}$ なら損失は 0．

定義 2. *2* 次の**損失関数**は，任意の $y, \hat{y}$ について

$$L(y, \hat{y}) := (y - \hat{y})^2$$

定義 3. Y_{t+h} の $\hat{Y}_{t+h|t}$ に対する**予測誤差**は

$$e_{t+h} := Y_{t+h} - \hat{Y}_{t+h|t}$$

注 3. 2 次の損失＝予測誤差の 2 乗．すなわち予測誤差の符号に関して対称な損失．

1.2　危険（リスク）関数

時点 t までの観測値を所与とした条件付き期待値を $\mathrm{E}_t(.)$ と書く．

定義 4. 予測子の損失の（条件付き）期待値を与える関数を**危険（リスク）関数**という．

注 4. $\hat{Y}_{t+h|t}$ の危険関数は

$$R\left(\hat{Y}_{t+h|t}\right) := \mathrm{E}_t\left(L\left(Y_{t+h}, \hat{Y}_{t+h|t}\right)\right)$$

定義 5. 予測誤差の 2 乗の（条件付き）期待値を予測子の**平均 *2* 乗誤差**（*mean squared error, MSE*）という．

注 5. $\hat{Y}_{t+h|t}$ の MSE は

$$\mathrm{MSE}\left(\hat{Y}_{t+h|t}\right) := \mathrm{E}_t\left(\left(Y_{t+h} - \hat{Y}_{t+h|t}\right)^2\right)$$

すなわち MSE = 2 次の損失の危険関数．

1.3 最適予測

危険関数が最小の予測子が最適．したがって最適予測は損失関数に依存する．2 次の損失なら MSE が最小の予測子が最適．時点 t までの観測値を所与とした条件付き分散を $\mathrm{var}_t(.)$ と書く．

定理 1.

$$\mathrm{MSE}\left(\hat{Y}_{t+h|t}\right) = \mathrm{var}_t(Y_{t+h}) + \left(\hat{Y}_{t+h|t} - \mathrm{E}_t(Y_{t+h})\right)^2$$

証明.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{MSE}\left(\hat{Y}_{t+h|t}\right)\\
&= \mathrm{E}_t\left(\left(Y_{t+h} - \hat{Y}_{t+h|t}\right)^2\right)\\
&= \mathrm{E}_t\left(\left(Y_{t+h} - \mathrm{E}_t(Y_{t+h}) - \left(\hat{Y}_{t+h|t} - \mathrm{E}_t(Y_{t+h})\right)\right)^2\right)\\
&= \mathrm{E}_t\left((Y_{t+h} - \mathrm{E}_t(Y_{t+h}))^2\right)\\
&\quad - 2\,\mathrm{E}_t\left((Y_{t+h} - \mathrm{E}_t(Y_{t+h}))\left(\hat{Y}_{t+h|t} - \mathrm{E}_t(Y_{t+h})\right)\right)\\
&\quad + \mathrm{E}_t\left(\left(\hat{Y}_{t+h|t} - \mathrm{E}_t(Y_{t+h})\right)^2\right)\\
&= \mathrm{var}_t(Y_{t+h})\\
&\quad - 2(\mathrm{E}_t(Y_{t+h}) - \mathrm{E}_t(Y_{t+h}))\left(\hat{Y}_{t+h|t} - \mathrm{E}_t(Y_{t+h})\right)\\
&\quad + \left(\hat{Y}_{t+h|t} - \mathrm{E}_t(Y_{t+h})\right)^2
\end{aligned}$$

第 2 項は 0. □

注 6. すなわち MSE =条件付き分散＋予測の偏りの 2 乗.

系 1. $\mathrm{MSE}\left(\hat{Y}_{t+h|t}\right)$ は $\hat{Y}_{t+h|t} = \mathrm{E}_t(Y_{t+h})$ のとき $\mathrm{var}_t(Y_{t+h})$ で最小.

証明. 前定理より明らか. □

注 7. すなわち 2 次の損失なら条件付き期待値が最適予測.

2 AR(1) 過程の予測

2.1 1 期先予測

簡単化のため $\{y_t\}$ を定数項なしの AR(1) 過程とする．すなわち任意の t について

$$\begin{aligned}
y_t &= \phi y_{t-1} + w_t\\
\{w_t\} &\sim \mathrm{WN}\left(\sigma^2\right)
\end{aligned}$$

簡単化のため母数は既知と仮定する.

定理 2. $\{w_t\}$ が *iid* なら任意の t について

$$\mathrm{E}_t(y_{t+1}) = \phi y_t$$

証明.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_t(y_{t+1}) &= \mathrm{E}_t(\phi y_t + w_{t+1})\\
&= \phi y_t + \mathrm{E}_t(w_{t+1})\\
&= \phi y_t + \mathrm{E}(w_{t+1})\\
&= \phi y_t
\end{aligned}$$

□

注 8. $\mathrm{E}_t(y_{t+1})$ は点予測値を与える.

定理 3. $\{w_t\}$ が *iid* なら任意の t について

$$\mathrm{var}_t(y_{t+1}) = \sigma^2$$

証明.

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}_t(y_{t+1}) &= \mathrm{var}_t(\phi y_t + w_{t+1})\\
&= \mathrm{var}_t(w_{t+1})\\
&= \mathrm{var}(w_{t+1})\\
&= \sigma^2
\end{aligned}$$

□

注 9. $\mathrm{var}_t(y_{t+1})$ から区間予測値（＝予測の信頼区間）を作成する．ただし本来は母数の推定誤差も考慮する必要がある.

2.2 h 期先予測

補題 1. 任意の t と $h \geq 1$ について

$$y_{t+h} = w_{t+h} + \phi w_{t+h-1} + \cdots + \phi^{h-1} w_{t+1} + \phi^h y_t$$

証明.

$$
\begin{aligned}
y_{t+h} &= \phi y_{t+h-1} + w_{t+h} \\
&= w_{t+h} + \phi y_{t+h-1} \\
&= w_{t+h} + \phi(w_{t+h-1} + \phi y_{t+h-2}) \\
&= w_{t+h} + \phi w_{t+h-1} + \phi^2 y_{t+h-2} \\
&= \cdots \\
&= w_{t+h} + \phi w_{t+h-1} + \cdots + \phi^{h-1} w_{t+1} + \phi^h y_t
\end{aligned}
$$

□

定理 4. $\{w_t\}$ が iid なら任意の t と $h \geq 1$ について

$$
\mathrm{E}_t(y_{t+h}) = \phi^h y_t
$$

証明. 補題より

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}_t(y_{t+h}) \\
&= \mathrm{E}_t\left(w_{t+h} + \phi w_{t+h-1} + \cdots + \phi^{h-1} w_{t+1} + \phi^h y_t\right) \\
&= \mathrm{E}_t(w_{t+h}) + \phi \,\mathrm{E}_t(w_{t+h-1}) + \cdots \\
&\quad + \phi^{h-1} \mathrm{E}_t(w_{t+1}) + \phi^h y_t \\
&= \mathrm{E}(w_{t+h}) + \phi \,\mathrm{E}(w_{t+h-1}) + \cdots \\
&\quad + \phi^{h-1} \mathrm{E}(w_{t+1}) + \phi^h y_t \\
&= \phi^h y_t
\end{aligned}
$$

□

定理 5. $\{w_t\}$ が iid なら任意の t と $h \geq 1$ について

$$
\mathrm{var}_t(y_{t+h}) = \left[1 + \phi^2 + \cdots + \phi^{2(h-1)}\right] \sigma^2
$$

証明. 補題より

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{var}_t(y_{t+h}) \\
&= \mathrm{var}_t\left(w_{t+h} + \phi w_{t+h-1} + \cdots + \phi^{h-1} w_{t+1} + \phi^h y_t\right) \\
&= \mathrm{var}_t\left(w_{t+h} + \phi w_{t+h-1} + \cdots + \phi^{h-1} w_{t+1}\right) \\
&= \mathrm{var}_t(w_{t+h}) + \mathrm{var}_t(\phi w_{t+h-1}) + \cdots \\
&\quad + \mathrm{var}_t\left(\phi^{h-1} w_{t+1}\right) \\
&= \mathrm{var}_t(w_{t+h}) + \phi^2 \mathrm{var}_t(w_{t+h-1}) + \cdots \\
&\quad + \phi^{2(h-1)} \mathrm{var}_t(w_{t+1}) \\
&= \mathrm{var}(w_{t+h}) + \phi^2 \mathrm{var}(w_{t+h-1}) + \cdots \\
&\quad + \phi^{2(h-1)} \mathrm{var}(w_{t+1}) \\
&= \left[1 + \phi^2 + \cdots + \phi^{2(h-1)}\right] \sigma^2
\end{aligned}
$$

□

3 AR(p) 過程の予測

3.1 1期先予測

$\{y_t\}$ を定数項なしの AR(p) 過程とする．すなわち任意の t について

$$
\begin{aligned}
y_t &= \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + w_t \\
\{w_t\} &\sim \mathrm{WN}\left(\sigma^2\right)
\end{aligned}
$$

定理 6. $\{w_t\}$ が iid なら任意の t について

$$
\mathrm{E}_t(y_{t+1}) = \phi_1 y_t + \cdots + \phi_p y_{t-p+1}
$$

証明.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}_t(y_{t+1}) &= \mathrm{E}_t(\phi_1 y_t + \cdots + \phi_p y_{t-p+1} + w_{t+1}) \\
&= \phi_1 y_t + \cdots + \phi_p y_{t-p+1} + \mathrm{E}_t(w_{t+1}) \\
&= \phi_1 y_t + \cdots + \phi_p y_{t-p+1} + \mathrm{E}(w_{t+1}) \\
&= \phi_1 y_t + \cdots + \phi_p y_{t-p+1}
\end{aligned}
$$

□

定理 7. $\{w_t\}$ が iid なら任意の t について

$$
\mathrm{var}_t(y_{t+1}) = \sigma^2
$$

証明.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{var}_t(y_{t+1}) &= \mathrm{var}_t(\phi_1 y_t + \cdots + \phi_p y_{t-p+1} + w_{t+1}) \\
&= \mathrm{var}_t(w_{t+1}) \\
&= \mathrm{var}(w_{t+1}) \\
&= \sigma^2
\end{aligned}
$$

□

3.2 h 期先予測

簡単化のため $p = 2$ とする．すなわち任意の t について

$$
\begin{aligned}
y_t &= \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + w_t \\
\{w_t\} &\sim \mathrm{WN}\left(\sigma^2\right)
\end{aligned}
$$

簡単化のため $h = 2$ とする．

定理 8. $\{w_t\}$ が iid なら任意の t について

$$
\mathrm{E}_t(y_{t+2}) = \left(\phi_1^2 + \phi_2\right) y_t + \phi_1 \phi_2 y_{t-1}
$$

証明. $\mathrm{E}_t(y_{t+1}) = \phi_1 y_t + \phi_2 y_{t-1}$ より

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_t(y_{t+2}) &= \mathrm{E}_t(\phi_1 y_{t+1} + \phi_2 y_t + w_{t+2}) \\
&= \phi_1 \mathrm{E}_t(y_{t+1}) + \phi_2 y_t + \mathrm{E}_t(w_{t+2}) \\
&= \phi_1(\phi_1 y_t + \phi_2 y_{t-1}) + \phi_2 y_t + \mathrm{E}(w_{t+2}) \\
&= \left(\phi_1^2 + \phi_2\right) y_t + \phi_1\phi_2 y_{t-1}
\end{aligned}$$

□

定理 9. $\{w_t\}$ が iid なら任意の t について

$$\mathrm{var}_t(y_{t+1}) = \left(1 + \phi_1^2\right)\sigma^2$$

証明. $\mathrm{var}_t(y_{t+1}) = \sigma^2$ より

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}_t(y_{t+2}) &= \mathrm{var}_t(\phi_1 y_{t+1} + \phi_2 y_t + w_{t+2}) \\
&= \mathrm{var}_t(\phi_1 y_{t+1} + w_{t+2}) \\
&= \phi_1^2 \mathrm{var}_t(y_{t+1}) + \mathrm{var}_t(w_{t+2}) \\
&= \phi_1^2\sigma^2 + \mathrm{var}(w_{t+2}) \\
&= \phi_1^2\sigma^2 + \sigma^2 \\
&= \left(1 + \phi_1^2\right)\sigma^2
\end{aligned}$$

□

注 10. $p, h \geq 3$ の場合も同様だが，かなり複雑．ベクトル・行列を用いると簡単になる．

4　MA・ARMA 過程の予測

反転可能な MA・ARMA 過程は AR(∞) で表現できる．したがって母数が既知なら $\{y_t\}$ から $\{w_t\}$ が一意に定まり，$\{w_t\}$ も観測可能とみなせる．

$\{y_t\}$ を平均 0 の MA(1) 過程とする．すなわち任意の t について

$$\begin{aligned}
y_t &= w_t - \theta w_{t-1} \\
\{w_t\} &\sim \mathrm{WN}\left(\sigma^2\right)
\end{aligned}$$

定理 10. $\{w_t\}$ が iid なら任意の t について

$$\mathrm{E}_t(y_{t+1}) = -\theta w_t$$

証明.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_t(y_{t+1}) &= \mathrm{E}_t(w_{t+1} - \theta w_t) \\
&= -\theta w_t
\end{aligned}$$

□

定理 11. $\{w_t\}$ が iid なら任意の t について

$$\mathrm{var}_t(y_{t+1}) = \sigma^2$$

証明.

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}_t(y_{t+1}) &= \mathrm{var}_t(w_{t+1} - \theta w_t) \\
&= \mathrm{var}_t(w_{t+1}) \\
&= \mathrm{var}(w_{t+1}) \\
&= \sigma^2
\end{aligned}$$

□

注 11. より高次の MA 過程や ARMA 過程の h 期先予測の場合も同様だが，かなり複雑．ベクトル・行列を用いると簡単になるが，実際には母数は未知で $\{w_t\}$ は観測不可能なので，正確な計算には状態空間モデルとカルマン・フィルターが必要．

5　今日のキーワード

損失関数，2 次の損失関数，予測誤差，危険（リスク）関数，平均 2 乗誤差（MSE）

6　次回までの準備

提出　宿題 6

復習　復習テスト 6

予習　教科書第 7 章 4.1 節