

第 10 回 単位根過程と単位根検定 (7.1.3–7.1.6)

村澤 康友

2020 年 12 月 15 日

今日のポイント

1. トレンドと共分散定常過程の和をトレンド定常過程という. 階差が共分散定常なら階差定常過程という.
2. AR 多項式 $\phi(z)$ について, $\phi(z) = 0$ の根が 1 なら単位根という. $\phi(z) = 0$ が単位根をもつなら $\{y_t\}$ は単位根過程という. $\phi(z) = 0$ が d 個の単位根をもつなら $\{y_t\}$ は $I(d)$.
3. 独立な $I(1)$ 間の回帰係数の OLS 推定量が 0 に確率収束しない現象を見せかけの回帰という.
4. DF 検定, ADF 検定, ADF-GLS 検定は $H_0: \{y_t\} \sim I(1)$ を検定する.
5. KPSS 検定は $H_0: \{y_t\} \sim I(0)$ を検定する.

目次

1	トレンド定常と階差定常	1
1.1	トレンド定常過程 (p. 128)	1
1.2	階差定常過程 (p. 127)	2
1.3	ランダム・ウォーク (p. 127)	2
2	単位根過程	2
2.1	和分過程 (p. 128)	2
2.2	単位根過程 (p. 128)	2
2.3	見せかけの回帰	3
3	単位根検定	4
3.1	DF 検定 (p. 132)	4

3.2	ADF 検定 (p. 132)	4
3.3	定数項とトレンド (p. 131)	5
3.4	ADF-GLS 検定	5
4	定常性検定	5
5	今日のキーワード	6
6	次回までの準備	6

1 トレンド定常と階差定常

1.1 トレンド定常過程 (p. 128)

$\{y_t\}$ を線形トレンドと平均 0 の共分散定常過程の和とする. すなわち任意の t について

$$y_t = \alpha + \delta t + u_t$$

定義 1. トレンドと共分散定常過程の和をトレンド定常過程という.

注 1. トレンド定常ならトレンドを除去して時系列分析を行う.

定理 1. 任意の t と $h \geq 1$ について

$$E_t(y_{t+h}) = \alpha + \delta(t+h) + E_t(u_{t+h})$$

証明.

$$\begin{aligned} E_t(y_{t+h}) &= E_t(\alpha + \delta(t+h) + u_{t+h}) \\ &= \alpha + \delta(t+h) + E_t(u_{t+h}) \end{aligned}$$

□

系 1. $\{u_t\}$ が iid なら任意の t と $h \geq 1$ について

$$E_t(y_{t+h}) = \alpha + \delta(t+h)$$

定理 2. 任意の t と $h \geq 1$ について

$$\text{var}_t(y_{t+h}) = \text{var}_t(u_{t+h})$$

証明.

$$\begin{aligned}\text{var}_t(y_{t+h}) &= \text{var}_t(\alpha + \delta(t+h) + u_{t+h}) \\ &= \text{var}_t(u_{t+h})\end{aligned}$$

□

系 2. $\{u_t\}$ が分散 σ^2 の iid なら任意の t と $h \geq 1$ について

$$\text{var}_t(y_{t+h}) = \sigma^2$$

1.2 階差定常過程 (p. 127)

$\{y_t\}$ の階差 $\{\Delta y_t\}$ を平均 δ の共分散定常過程とする. すなわち任意の t について

$$\Delta y_t = \delta + u_t$$

定義 2. 階差が共分散定常なら階差定常過程という.

注 2. 階差定常なら階差をとって時系列分析を行う.

定理 3. 任意の t と $h \geq 1$ について

$$E_t(y_{t+h}) = y_t + \delta h + E_t(u_{t+1}) + \cdots + E_t(u_{t+h})$$

証明. 逐次代入すると

$$\begin{aligned}y_{t+h} &= y_{t+h-1} + \delta + u_{t+h} \\ &= \dots \\ &= y_t + \delta + u_{t+1} + \cdots + \delta + u_{t+h} \\ &= y_t + \delta h + u_{t+1} + \cdots + u_{t+h}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}E_t(y_{t+h}) &= E_t(y_t + \delta h + u_{t+1} + \cdots + u_{t+h}) \\ &= y_t + \delta h + E_t(u_{t+1}) + \cdots + E_t(u_{t+h})\end{aligned}$$

□

系 3. $\{u_t\}$ が iid なら任意の t と $h \geq 1$ について

$$E_t(y_{t+h}) = y_t + \delta h$$

定理 4. 任意の t と $h \geq 1$ について

$$\text{var}_t(y_{t+h}) = \text{var}_t(u_{t+1} + \cdots + u_{t+h})$$

証明.

$$\begin{aligned}\text{var}_t(y_{t+h}) &= \text{var}_t(y_t + \delta h + u_{t+1} + \cdots + u_{t+h}) \\ &= \text{var}_t(u_{t+1} + \cdots + u_{t+h})\end{aligned}$$

□

系 4. $\{u_t\}$ が分散 σ^2 の iid なら任意の t と $h \geq 1$ について

$$\text{var}_t(y_{t+h}) = \sigma^2 h$$

1.3 ランダム・ウォーク (p. 127)

定義 3. $\{\Delta y_t\}$ がホワイト・ノイズなら $\{y_t\}$ はランダム・ウォークという.

定義 4. 時系列が平均に戻る性質を平均回帰性という.

注 3. 平均が存在するなら平均回帰的. ランダム・ウォークは平均回帰的でない.

例 1. 共分散定常過程とランダム・ウォーク (図 1).

定義 5. $\delta \neq 0$ として $\{\Delta y_t - \delta\}$ がホワイト・ノイズなら $\{y_t\}$ はドリフト付きランダム・ウォークという.

2 単位根過程

2.1 和分過程 (p. 128)

定義 6. $\{\Delta^d y_t\}$ が共分散定常なら $\{y_t\}$ は d 次の和分過程という.

注 4. $I(d)$ と書く. $I(0)$ = 共分散定常. $I(1)$ = 階差定常.

注 5. $I(d)$ は $I(0)$ に変換して分析する.

2.2 単位根過程 (p. 128)

$\{y_t\}$ を $AR(p)$ とする. すなわち任意の t について

$$\begin{aligned}\phi(L)(y_t - \mu) &= w_t \\ \{w_t\} &\sim WN(\sigma^2)\end{aligned}$$

ただし $\phi(L) := 1 - \phi_1 L - \cdots - \phi_p L^p$. p 次方程式 $\phi(z) = 0$ の p 個の根は, すべて絶対値で 1 以上とする.

定義 7. $\phi(z) = 0$ の根が 1 なら単位根という.

定義 8. $\phi(z) = 0$ が単位根をもつなら $\{y_t\}$ は単位根過程という.

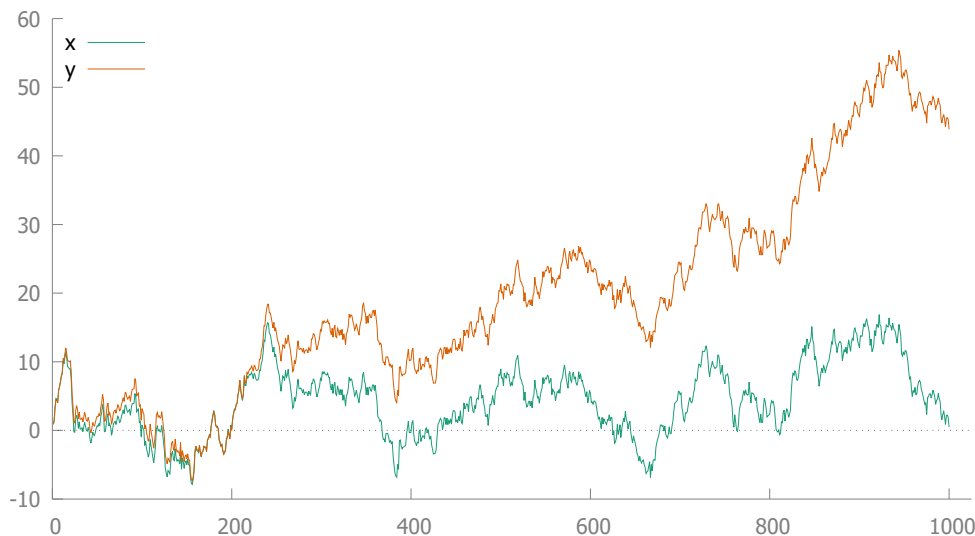


図1 共分散定常過程とランダム・ウォーク

定理 5. $\phi(z) = 0$ が d 個の単位根をもつなら $\{y_t\}$ は $I(d)$.

証明. $\phi(z)$ を因数分解すると

$$\phi(z) = \phi^*(z)(1-z)^d$$

したがって任意の t について

$$\phi^*(L)(1-L)^d(y_t - \mu) = w_t$$

すなわち

$$\phi^*(L)\Delta^d y_t = w_t$$

$\phi^*(z) = 0$ の根はすべて絶対値で 1 より大きいので $\{\Delta^d y_t\}$ は $I(0)$. □

2.3 見せかけの回帰

$\{x_t\}$ と $\{y_t\}$ を独立なランダム・ウォークとする.
すなわち任意の t について

$$\begin{aligned} x_t &= x_{t-1} + u_t \\ y_t &= y_{t-1} + v_t \\ \{u_t\} &\sim \text{WN}(\sigma_u^2) \\ \{v_t\} &\sim \text{WN}(\sigma_v^2) \end{aligned}$$

ただし $\{u_t\}$ と $\{v_t\}$ は独立. 次の 2 つの単回帰を考える (定数項なし).

1. $\{\Delta y_t\}$ を $\{\Delta x_t\}$ に回帰

2. $\{y_t\}$ を $\{x_t\}$ に回帰

長さ T の時系列が与えられたときの回帰係数の OLS 推定量を, それぞれ $b_{T,0}, b_{T,1}$ とする.

定理 6. $\{u_t\}, \{v_t\}$ が定常・エルゴード的なら

$$\text{plim}_{T \rightarrow \infty} b_{T,0} = 0$$

証明. OLS 推定量は

$$\begin{aligned} b_{T,0} &= \frac{\sum_{t=2}^T \Delta x_t \Delta y_t}{\sum_{t=2}^T (\Delta x_t)^2} \\ &= \frac{(1/T) \sum_{t=2}^T u_t v_t}{(1/T) \sum_{t=2}^T u_t^2} \end{aligned}$$

エルゴード定理より

$$\begin{aligned} \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T u_t v_t &= E(u_t v_t) \\ \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T u_t^2 &= E(u_t^2) \end{aligned}$$

$\{u_t\}$ と $\{v_t\}$ は独立なホワイト・ノイズなので

$$\begin{aligned} \text{plim}_{T \rightarrow \infty} b_{T,0} &= \frac{E(u_t v_t)}{E(u_t^2)} \\ &= \frac{E(u_t) E(v_t)}{E(u_t^2)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

定理 7.

$$\text{plim}_{T \rightarrow \infty} b_{T,1} \neq 0$$

証明. OLS 推定量は

$$\begin{aligned} b_{T,1} &= \frac{\sum_{t=1}^T x_t y_t}{\sum_{t=1}^T x_t^2} \\ &= \frac{(1/T^2) \sum_{t=1}^T x_t y_t}{(1/T^2) \sum_{t=1}^T x_t^2} \end{aligned}$$

分子・分母を変形すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T x_t y_t &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{s=1}^t u_s \right) \left(\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{s=1}^t v_s \right) \\ \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T x_t^2 &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{s=1}^t u_s \right)^2 \end{aligned}$$

これらは 0 でない確率変数に分布収束する (詳細は略). \square

定義 9. 独立な I(1) 間の回帰係数の OLS 推定量が 0 に確率収束しない現象を見せかけの回帰という.

注 6. I(1) なら I(0) に変換して回帰すればよいが, 事前に I(0) か I(1) か確認する必要がある.

例 2. 2つの独立なランダム・ウォーク (図 2).

3 単位根検定

3.1 DF 検定 (p. 132)

$\{y_t\}$ を定数項なしの AR(1) とする. すなわち任意の t について

$$\begin{aligned} y_t &= \phi y_{t-1} + w_t \\ \{w_t\} &\sim \text{WN}(\sigma^2) \end{aligned}$$

$\phi = 1$ なら I(1), $|\phi| < 1$ なら I(0). 単位根検定問題は

$$H_0: \phi = 1 \quad \text{vs} \quad H_1: \phi < 1$$

両辺から y_{t-1} を引くと, 任意の t について

$$\Delta y_t = \gamma y_{t-1} + w_t$$

ただし $\gamma := \phi - 1$. したがって単位根検定問題は

$$H_0: \gamma = 0 \quad \text{vs} \quad H_1: \gamma < 0$$

\square H_0 の下で γ の OLS 推定量は漸近正規性をもたず, t 統計量は $N(0, 1)$ に分布収束しない.

定義 10. Δy_t の y_{t-1} 上への回帰における y_{t-1} の回帰係数の t 統計量を τ 統計量という.

定義 11. τ 統計量の正しい漸近分布に基づく単位根検定を *Dicky-Fuller (DF) 検定* という.

3.2 ADF 検定 (p. 132)

$\{y_t\}$ を定数項なしの AR($p+1$) とする. すなわち任意の t について

$$\begin{aligned} \phi(L)y_t &= w_t \\ \{w_t\} &\sim \text{WN}(\sigma^2) \end{aligned}$$

補題 1.

$$\phi(L) = \phi(1)L + \phi^*(L)(1-L)$$

ただし $\phi^*(L)$ は p 次のラグ多項式.

証明. $\phi(z)$ を式変形すると

$$\phi(z) = \phi(1)z + \phi(z) - \phi(1)z$$

$\phi(z) - \phi(1)z$ は $z = 1$ で 0 なので, 因数分解より任意の z について

$$\phi(z) - \phi(1)z = \phi^*(z)(1-z)$$

\square

定理 8. 任意の t について

$$\phi^*(L)\Delta y_t = -\phi(1)y_{t-1} + w_t$$

証明. 補題より, 任意の t について

$$\begin{aligned} \phi(L)y_t &= [\phi(1)L + \phi^*(L)(1-L)]y_t \\ &= \phi(1)Ly_t + \phi^*(L)(1-L)y_t \\ &= \phi(1)y_{t-1} + \phi^*(L)\Delta y_t \end{aligned}$$

したがって任意の t について

$$\phi(1)y_{t-1} + \phi^*(L)\Delta y_t = w_t$$

\square

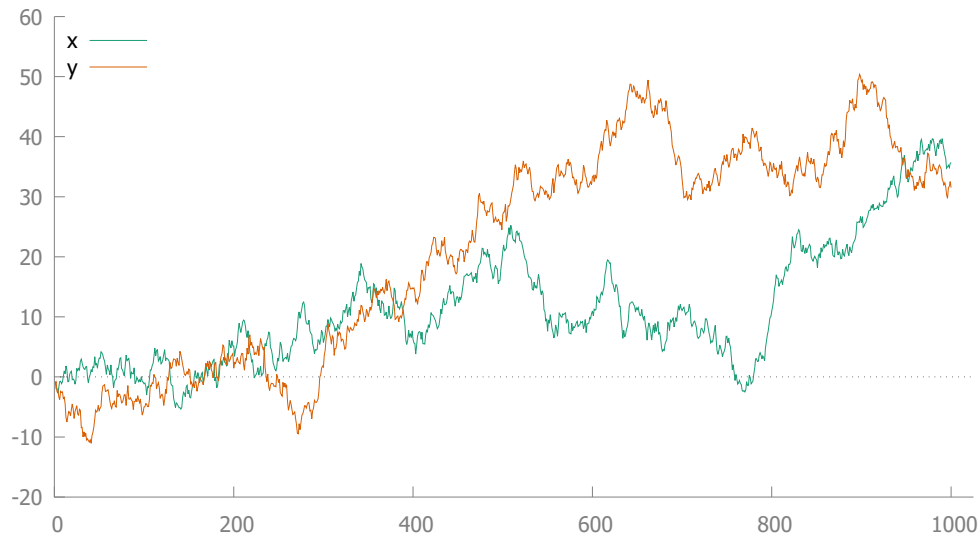


図2 2つの独立なランダム・ウォーク

注 7. すなわち任意の t について

$$\Delta y_t = -\phi(1)y_{t-1} + \phi_1^* \Delta y_{t-1} + \dots + \phi_p^* \Delta y_{t-p} + w_t$$

単位根検定問題は

$$H_0 : \phi(1) = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \phi(1) > 0$$

定義 12. Δy_t の $(y_{t-1}, \Delta y_{t-1}, \dots, \Delta y_{t-p})$ 上への回帰における y_{t-1} の偏回帰係数の τ 統計量を用いる単位根検定を拡張 DF (augmented DF, ADF) 検定という。

注 8. ラグ次数 p は情報量基準等で選択する。

3.3 定数項とトレンド (p. 131)

Δy_t の y_{t-1} 上への回帰に定数項を入れると

$$\Delta y_t = \alpha + \gamma y_{t-1} + w_t$$

線形トレンドを入れると

$$\Delta y_t = \alpha + \beta t + \gamma y_{t-1} + w_t$$

定数項・トレンドは OLS で推定できる。ADF 検定も同様。ただし定数項・トレンドの有無で τ 統計量の漸近分布は異なる。

3.4 ADF-GLS 検定

定数項・トレンドを OLS でなく一般化最小 2 乗法 (generalized least squares, GLS) で推定すると、単位根検定の検出力が高まる。

定義 13. 定数項・トレンドを GLS で推定した ADF 検定を ADF-GLS 検定という。

4 定常性検定

$\{y_t\}$ を確率過程とする。単位根検定問題は

$$H_0 : \{y_t\} \sim I(1) \quad \text{vs} \quad H_1 : \{y_t\} \sim I(0)$$

定常性検定問題は

$$H_0 : \{y_t\} \sim I(0) \quad \text{vs} \quad H_1 : \{y_t\} \sim I(1)$$

次の統計量を考える。

$$LM := \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{s=1}^t y_s \right)^2$$

これは $\{y_t\}$ が平均 0, 分散 1 の iid なら分布収束するが, $I(1)$ なら発散する。

定義 14. KPSS 統計量は

$$LM := \frac{T^{-1} \sum_{t=1}^T \left(T^{-1/2} \sum_{s=1}^t y_s \right)^2}{\text{var} \left(T^{-1/2} \sum_{t=1}^T y_t \right)}$$

注 9. 分母の分散は

$$\begin{aligned}\text{var}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^T y_t\right) &= \frac{\text{var}(y_1 + \cdots + y_T)}{T} \\ &= \dots \\ &= \sum_{s=-(T-1)}^{T-1} \frac{T-|s|}{T} \gamma(s)\end{aligned}$$

一致推定量は

$$\hat{\text{var}}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^T y_t\right) := \sum_{s=-S}^S \frac{S+1-|s|}{S+1} \hat{\gamma}(s)$$

推定に用いる標本自己共分散の最大次数 S を設定する必要がある。

注 10. KPSS 統計量は $\{y_t\}$ が $I(0)$ なら分布収束するが、 $I(1)$ なら発散する。ただし定数項・トレンドの有無で KPSS 統計量の漸近分布は異なる。

定義 15. KPSS 統計量を用いた定常性検定を *KPSS 検定* という。

注 11. 単位根検定と定常性検定の結果は必ずしも一致しない。

5 今日のキーワード

トレンド定常過程, 階差定常過程, ランダム・ウォーク, 平均回帰性, ドリフト付きランダム・ウォーク, d 次の和分過程, 単位根, 単位根過程, 見せかけの回帰, τ 統計量, Dicky-Fuller (DF) 検定, 拡張 DF (ADF) 検定, ADF-GLS 検定, KPSS 統計量, KPSS 検定

6 次回までの準備

提出 宿題 10

復習 教科書第 7 章 1.3–1.6 節, 復習テスト 10

予習 教科書第 7 章 3 節