

## 計量経済 II : 復習テスト 3

学籍番号 \_\_\_\_\_ 氏名 \_\_\_\_\_

2020 年 10 月 13 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。正答に修正した上で、復習テスト 1~8 を（左上で）ホチキス止めし、中間試験実施日（12 月 1 日の予定）にまとめて提出すること。

1.  $\{Y_t\}$  を平均  $\mu$ , 自己共分散関数  $\gamma(\cdot)$  の共分散定常過程とする。

(a)  $\text{var}(Y_1 + Y_2)$  の定義を書きなさい。

(b)  $[(Y_1 - \mu) + (Y_2 - \mu)]^2$  を展開しなさい。

(c)  $\text{var}(Y_1 + Y_2)$  を  $\gamma(0)$  と  $\gamma(1)$  で表しなさい。

(d)  $\text{var}((Y_1 + Y_2)/2)$  を  $\gamma(0)$  と  $\gamma(1)$  で表しなさい。

2.  $\{Y_t\}$  を平均 0, 分散  $\sigma^2$  の iid とする. 簡単化のため平均 0 を既知とすると,  $s$  次の標本自己共分散は

$$\hat{\gamma}_T(s) := \frac{1}{T} \sum_{t=s+1}^T Y_t Y_{t-s}$$

$s \geq 1$  として以下を示しなさい.

(a)

$$E(Y_t Y_{t-s}) = 0$$

(b)

$$\text{var}(Y_t Y_{t-s}) = \gamma(0)^2$$

(c)  $r \geq 1$  について

$$\text{cov}(Y_t Y_{t-s}, Y_{t-r} Y_{t-s-r}) = 0$$

(d)

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T Y_t Y_{t-s} \xrightarrow{d} N(0, \gamma(0)^2)$$

(e)

$$\sqrt{T} \hat{\gamma}_T(s) \xrightarrow{d} N(0, \gamma(0)^2)$$

解答例

1. (a)

$$\text{var}(Y_1 + Y_2) := \mathbb{E}((Y_1 + Y_2 - \mathbb{E}(Y_1 + Y_2))^2)$$

(b)

$$[(Y_1 - \mu) + (Y_2 - \mu)]^2 = (Y_1 - \mu)^2 + 2(Y_1 - \mu)(Y_2 - \mu) + (Y_2 - \mu)^2$$

(c)

$$\begin{aligned}\text{var}(Y_1 + Y_2) &:= \mathbb{E}((Y_1 + Y_2 - \mathbb{E}(Y_1 + Y_2))^2) \\ &= \mathbb{E}((Y_1 - \mathbb{E}(Y_1) + Y_2 - \mathbb{E}(Y_2))^2) \\ &= \mathbb{E}((Y_1 - \mu + Y_2 - \mu)^2) \\ &= \mathbb{E}((Y_1 - \mu)^2 + 2(Y_1 - \mu)(Y_2 - \mu) + (Y_2 - \mu)^2) \\ &= \mathbb{E}((Y_1 - \mu)^2) + 2\mathbb{E}((Y_1 - \mu)(Y_2 - \mu)) + \mathbb{E}((Y_2 - \mu)^2) \\ &= \text{var}(Y_1) + 2\text{cov}(Y_1, Y_2) + \text{var}(Y_2) \\ &= \gamma(0) + 2\gamma(1) + \gamma(0) \\ &= 2(\gamma(0) + \gamma(1))\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\text{var}\left(\frac{Y_1 + Y_2}{2}\right) &= \frac{\text{var}(Y_1 + Y_2)}{4} \\ &= \frac{2(\gamma(0) + \gamma(1))}{4} \\ &= \frac{\gamma(0) + \gamma(1)}{2}\end{aligned}$$

2. (a)  $Y_t$  と  $Y_{t-s}$  は独立なので

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_t Y_{t-s}) &= \mathbb{E}(Y_t) \mathbb{E}(Y_{t-s}) \\ &= \mathbb{E}(Y_t) \mathbb{E}(Y_t) \\ &= 0\end{aligned}$$

(b)  $\mathbb{E}(Y_t Y_{t-s}) = 0$  なので

$$\begin{aligned}\text{var}(Y_t Y_{t-s}) &= \mathbb{E}((Y_t Y_{t-s})^2) \\ &= \mathbb{E}(Y_t^2 Y_{t-s}^2) \\ &= \mathbb{E}(Y_t^2) \mathbb{E}(Y_{t-s}^2) \\ &= \text{var}(Y_t) \text{var}(Y_{t-s}) \\ &= \text{var}(Y_t) \text{var}(Y_t) \\ &= \gamma(0)^2\end{aligned}$$

(c)  $\mathbb{E}(Y_t Y_{t-s}) = 0$  なので

$$\begin{aligned}\text{cov}(Y_t Y_{t-s}, Y_{t-r} Y_{t-s-r}) &= \mathbb{E}(Y_t Y_{t-s} Y_{t-r} Y_{t-s-r}) \\ &= \mathbb{E}(Y_t) \mathbb{E}(Y_{t-s} Y_{t-r}) \mathbb{E}(Y_{t-s-r}) \\ &= \mathbb{E}(Y_t) \mathbb{E}(Y_{t-s} Y_{t-r}) \mathbb{E}(Y_t) \\ &= 0\end{aligned}$$

※  $r = s$  なら  $E(Y_{t-s}Y_{t-r}) \neq E(Y_{t-s})E(Y_{t-r})$ .

(d)  $\{Y_t Y_{t-s}\}$  は分散  $\gamma(0)^2$  のホワイト・ノイズなので、(若干の追加的な条件の下で) 中心極限定理より結果が成立.

(e) 前問より

$$\begin{aligned}\sqrt{T}\hat{\gamma}_T(s) &= \sqrt{T} \frac{1}{T} \sum_{t=s+1}^T Y_t Y_{t-s} \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=s+1}^T Y_t Y_{t-s} \\ &\xrightarrow{d} N(0, \gamma(0)^2)\end{aligned}$$