

計量経済 II : 復習テスト 5

学籍番号 _____ 氏名 _____

2020 年 10 月 27 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。正答に修正した上で、復習テスト 1~8 を（左上で）ホチキス止めし、中間試験実施日（12 月 1 日の予定）にまとめて提出すること。

1. 時系列 (y_1, \dots, y_T) に次の正規 AR(1) モデルを仮定する。すなわち $t = 1, \dots, T$ について

$$y_t = \phi y_{t-1} + w_t$$
$$\{w_t\} \sim \text{IN}(0, \sigma^2)$$

ただし $|\phi| < 1$.

- (a) $E(y_t)$ を求めなさい。

- (b) $\text{var}(y_t)$ を求めなさい。

- (c) y_t の周辺 pdf を求めなさい。

2. 引き続き前問の状況を考える.

(a) $E(y_t|y_{t-1}, \dots, y_1)$ を求めなさい.

(b) $\text{var}(y_t|y_{t-1}, \dots, y_1)$ を求めなさい.

(c) (y_{t-1}, \dots, y_1) を所与とした y_t の条件つき pdf を求めなさい.

(d) 予測誤差分解を用いて y_1 を所与とした (y_2, \dots, y_T) の条件つき同時 pdf を求めなさい.

解答例

1. (a)

$$\begin{aligned} E(y_t) &= E(\phi y_{t-1} + w_t) \\ &= \phi E(y_{t-1}) + E(w_t) \\ &= \phi E(y_t) + E(w_t) \\ &= \frac{E(w_t)}{1 - \phi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \text{var}(y_t) &= \text{var}(\phi y_{t-1} + w_t) \\ &= \text{var}(\phi y_{t-1}) + 2 \text{cov}(\phi y_{t-1}, w_t) + \text{var}(w_t) \\ &= \phi^2 \text{var}(y_{t-1}) + \sigma^2 \\ &= \phi^2 \text{var}(y_t) + \sigma^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2} \end{aligned}$$

(c) y_t は正規分布の線形変換なので, 前 2 問より

$$y_t \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}\right)$$

pdf は任意の y について

$$f(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/(1-\phi^2)}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2/(1-\phi^2)}\right)$$

2. (a) $\{w_t\}$ は iid なので

$$\begin{aligned} E(y_t | y_{t-1}, \dots, y_1) &= E(\phi y_{t-1} + w_t | y_{t-1}, \dots, y_1) \\ &= \phi y_{t-1} + E(w_t | y_{t-1}, \dots, y_1) \\ &= \phi y_{t-1} + E(w_t) \\ &= \phi y_{t-1} \end{aligned}$$

(b) $\{w_t\}$ は iid なので

$$\begin{aligned} \text{var}(y_t | y_{t-1}, \dots, y_1) &= \text{var}(\phi y_{t-1} + w_t | y_{t-1}, \dots, y_1) \\ &= \text{var}(w_t | y_{t-1}, \dots, y_1) \\ &= \text{var}(w_t) \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

(c) y_t は正規分布の線形変換なので, 前 2 問より

$$y_t | y_{t-1}, \dots, y_1 \sim N(\phi y_{t-1}, \sigma^2)$$

pdf は任意の y について

$$f(y | y_{t-1}, \dots, y_1) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y - \phi y_{t-1})^2}{2\sigma^2}\right)$$

(d) 予測誤差分解より

$$\begin{aligned} f(y_2, \dots, y_T | y_1) &= f(y_T | y_{T-1}, \dots, y_1) \cdots f(y_2 | y_1) \\ &= \prod_{t=2}^T f(y_t | y_{t-1}, \dots, y_1) \\ &= \prod_{t=2}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y_t - \phi y_{t-1})^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned}$$