

計量経済 II : 復習テスト 6

学籍番号 _____ 氏名 _____

2020 年 11 月 10 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。正答に修正した上で，復習テスト 1~8 を（左上で）ホチキス止めし，中間試験実施日（12 月 1 日の予定）にまとめて提出すること。

1. 確率過程 $\{Y_t\}$ の h 期先予測を考える。時点 t までの観測値を所与とした Y_{t+h} の予測子を $\hat{Y}_{t+h|t}$ ，条件付き期待値を $E_t(Y_{t+h})$ ，条件付き分散を $\text{var}_t(Y_{t+h})$ と書く。

(a) $\hat{Y}_{t+h|t}$ の MSE を定義しなさい。

(b) 次式を示しなさい。

$$\text{MSE}(\hat{Y}_{t+h|t}) = \text{var}_t(Y_{t+h}) + \left(\hat{Y}_{t+h|t} - E_t(Y_{t+h})\right)^2$$

(c) 2 次の損失関数の下で $\hat{Y}_{t+h|t} := E_t(Y_{t+h})$ が最適予測となる理由を説明しなさい。

2. $\{y_t\}$ を定数項なしの AR(2) 過程とする. すなわち任意の t について

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + w_t$$
$$\{w_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$$

$\{w_t\}$ は iid, 母数は既知と仮定する.

(a) $E_t(y_{t+1})$ を求めなさい.

(b) $E_t(y_{t+2})$ を求めなさい.

(c) $\text{var}_t(y_{t+1})$ を求めなさい.

(d) $\text{var}_t(y_{t+2})$ を求めなさい.

解答例

1. (a)

$$\text{MSE}(\hat{Y}_{t+h|t}) := \mathbf{E}_t \left((Y_{t+h} - \hat{Y}_{t+h|t})^2 \right)$$

(b)

$$\begin{aligned} & \text{MSE}(\hat{Y}_{t+h|t}) \\ &= \mathbf{E}_t \left((Y_{t+h} - \mathbf{E}_t(Y_{t+h}) - (\hat{Y}_{t+h|t} - \mathbf{E}_t(Y_{t+h})))^2 \right) \\ &= \mathbf{E}_t \left((Y_{t+h} - \mathbf{E}_t(Y_{t+h}))^2 - 2(Y_{t+h} - \mathbf{E}_t(Y_{t+h}))(\hat{Y}_{t+h|t} - \mathbf{E}_t(Y_{t+h})) + (\hat{Y}_{t+h|t} - \mathbf{E}_t(Y_{t+h}))^2 \right) \\ &= \mathbf{E}_t \left((Y_{t+h} - \mathbf{E}_t(Y_{t+h}))^2 \right) - 2 \mathbf{E} \left((Y_{t+h} - \mathbf{E}_t(Y_{t+h}))(\hat{Y}_{t+h|t} - \mathbf{E}_t(Y_{t+h})) \right) \\ &\quad + \mathbf{E}_t \left((\hat{Y}_{t+h|t} - \mathbf{E}_t(Y_{t+h}))^2 \right) \\ &= \text{var}_t(Y_{t+h}) - 2(\mathbf{E}_t(Y_{t+h}) - \mathbf{E}_t(Y_{t+h}))(\hat{Y}_{t+h|t} - \mathbf{E}_t(Y_{t+h})) + (\hat{Y}_{t+h|t} - \mathbf{E}_t(Y_{t+h}))^2 \\ &= \text{var}_t(Y_{t+h}) + (\hat{Y}_{t+h|t} - \mathbf{E}_t(Y_{t+h}))^2 \end{aligned}$$

(c) 2 次の損失関数なら MSE が最小の予測子が最適. 前問より $\hat{Y}_{t+h|t} := \mathbf{E}_t(Y_{t+h})$ なら MSE は最小.

2. (a) $\{w_t\}$ は iid なので

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t(y_{t+1}) &= \mathbf{E}_t(\phi_1 y_t + \phi_2 y_{t-1} + w_{t+1}) \\ &= \phi_1 y_t + \phi_2 y_{t-1} + \mathbf{E}_t(w_{t+1}) \\ &= \phi_1 y_t + \phi_2 y_{t-1} + \mathbf{E}(w_{t+1}) \\ &= \phi_1 y_t + \phi_2 y_{t-1} \end{aligned}$$

(b) $\{w_t\}$ は iid なので, 前問より

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t(y_{t+2}) &= \mathbf{E}_t(\phi_1 y_{t+1} + \phi_2 y_t + w_{t+2}) \\ &= \phi_1 \mathbf{E}_t(y_{t+1}) + \phi_2 y_t + \mathbf{E}_t(w_{t+2}) \\ &= \phi_1(\phi_1 y_t + \phi_2 y_{t-1}) + \phi_2 y_t + \mathbf{E}(w_{t+2}) \\ &= (\phi_1^2 + \phi_2) y_t + \phi_1 \phi_2 y_{t-1} \end{aligned}$$

(c) $\{w_t\}$ は iid なので

$$\begin{aligned} \text{var}_t(y_{t+1}) &= \text{var}_t(\phi_1 y_t + \phi_2 y_{t-1} + w_{t+1}) \\ &= \text{var}_t(w_{t+1}) \\ &= \text{var}(w_{t+1}) \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

(d) $\{w_t\}$ は iid なので, 前問より

$$\begin{aligned}\text{var}_t(y_{t+2}) &= \text{var}_t(\phi_1 y_{t+1} + \phi_2 y_t + w_{t+2}) \\ &= \text{var}_t(\phi_1 y_{t+1} + w_{t+2}) \\ &= \phi_1^2 \text{var}_t(y_{t+1}) + \text{var}_t(w_{t+2}) \\ &= \phi_1^2 \sigma^2 + \text{var}(w_{t+2}) \\ &= \phi_1^2 \sigma^2 + \sigma^2 \\ &= (1 + \phi_1^2) \sigma^2\end{aligned}$$