計量経済 II：復習テスト 7

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2020 年 11 月 17 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 1〜8 を（左上で）ホチキス止めし，中間試験実施日（12 月 1 日の予定）にまとめて提出すること．

1. $\{(x_t, y_t, z_t)'\}$ に関する定数項なしの 3 変量 VAR(p) モデルは，任意の t について

$$\begin{bmatrix} \phi_{xx}(\mathrm{L}) & \phi_{xy}(\mathrm{L}) & \phi_{xz}(\mathrm{L}) \\ \phi_{yx}(\mathrm{L}) & \phi_{yy}(\mathrm{L}) & \phi_{yz}(\mathrm{L}) \\ \phi_{zx}(\mathrm{L}) & \phi_{zy}(\mathrm{L}) & \phi_{zz}(\mathrm{L}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \\ w_t \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \\ w_t \end{pmatrix} \right\} \sim \mathrm{WN}(\boldsymbol{\Sigma})$$

以下のケースについて，VAR(p) モデルの各式をラグ多項式を使わずに書きなさい．

（a）$p = 1$

（b）$p = 2$

2. $\{(x_t, y_t)'\}$ に関する定数項なしの 2 変量 VAR(1) モデルは，任意の t について

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Phi} \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix}$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} \right\} \sim \mathrm{WN}(\boldsymbol{\Sigma})$$

ただし

$$\boldsymbol{\Phi} := \begin{bmatrix} \phi_{xx} & \phi_{xy} \\ \phi_{yx} & \phi_{yy} \end{bmatrix}$$

$\{\boldsymbol{w}_t\}$ は iid とする．

（a）$\mathrm{E}_t(x_{t+1})$ を求めなさい．

（b）$\boldsymbol{\Phi}^2$ を求めなさい．

（c）$\mathrm{E}_t(x_{t+2})$ を求めなさい．

解答例

1.（a）各式をベクトル・行列を使わずに書くと，任意の t について

$$
\begin{aligned}
\phi_{xx}(\mathrm{L})x_t + \phi_{xy}(\mathrm{L})y_t + \phi_{xz}(\mathrm{L})z_t &= u_t \\
\phi_{yx}(\mathrm{L})x_t + \phi_{yy}(\mathrm{L})y_t + \phi_{yz}(\mathrm{L})z_t &= v_t \\
\phi_{zx}(\mathrm{L})x_t + \phi_{zy}(\mathrm{L})y_t + \phi_{zz}(\mathrm{L})z_t &= w_t
\end{aligned}
$$

ラグ多項式を使わずに書くと，任意の t について

$$
\begin{aligned}
x_t &= \sum_{s=1}^{p} \phi_{xx,s}x_{t-s} + \sum_{s=1}^{p} \phi_{xy,s}y_{t-s} + \sum_{s=1}^{p} \phi_{xz,s}z_{t-s} + u_t \\
y_t &= \sum_{s=1}^{p} \phi_{yx,s}x_{t-s} + \sum_{s=1}^{p} \phi_{yy,s}y_{t-s} + \sum_{s=1}^{p} \phi_{yz,s}z_{t-s} + v_t \\
z_t &= \sum_{s=1}^{p} \phi_{zx,s}x_{t-s} + \sum_{s=1}^{p} \phi_{zy,s}y_{t-s} + \sum_{s=1}^{p} \phi_{zz,s}z_{t-s} + w_t
\end{aligned}
$$

$p = 1$ なら任意の t について

$$
\begin{aligned}
x_t &= \phi_{xx}x_{t-1} + \phi_{xy}y_{t-1} + \phi_{xz}z_{t-1} + u_t \\
y_t &= \phi_{yx}x_{t-1} + \phi_{yy}y_{t-1} + \phi_{yz}z_{t-1} + v_t \\
z_t &= \phi_{zx}x_{t-1} + \phi_{zy}y_{t-1} + \phi_{zz}z_{t-1} + w_t
\end{aligned}
$$

（b）前問と同様に $p = 2$ なら任意の t について

$$
\begin{aligned}
x_t &= \phi_{xx,1}x_{t-1} + \phi_{xx,2}x_{t-2} + \phi_{xy,1}y_{t-1} + \phi_{xy,2}y_{t-2} + \phi_{xz,1}z_{t-1} + \phi_{xz,2}z_{t-2} + u_t \\
y_t &= \phi_{yx,1}x_{t-1} + \phi_{yx,2}x_{t-2} + \phi_{yy,1}y_{t-1} + \phi_{yy,2}y_{t-2} + \phi_{yz,1}z_{t-1} + \phi_{yz,2}z_{t-2} + v_t \\
z_t &= \phi_{zx,1}x_{t-1} + \phi_{zx,2}x_{t-2} + \phi_{zy,1}y_{t-1} + \phi_{zy,2}y_{t-2} + \phi_{zz,1}z_{t-1} + \phi_{zz,2}z_{t-2} + w_t
\end{aligned}
$$

2.（a）

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}_t\left(\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix}\right) &= \mathrm{E}_t\left(\boldsymbol{\Phi}\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{t+1} \\ v_{t+1} \end{pmatrix}\right) \\
&= \boldsymbol{\Phi}\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + \mathrm{E}_t\left(\begin{pmatrix} u_{t+1} \\ v_{t+1} \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} \phi_{xx} & \phi_{xy} \\ \phi_{yx} & \phi_{yy} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + \mathrm{E}\left(\begin{pmatrix} u_{t+1} \\ v_{t+1} \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \phi_{xx}x_t + \phi_{xy}y_t \\ \phi_{yx}x_t + \phi_{yy}y_t \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

したがって $\mathrm{E}_t(x_{t+1}) = \phi_{xx}x_t + \phi_{xy}y_t$.

（b）

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Phi}^2 &= \begin{bmatrix} \phi_{xx} & \phi_{xy} \\ \phi_{yx} & \phi_{yy} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi_{xx} & \phi_{xy} \\ \phi_{yx} & \phi_{yy} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \phi_{xx}^2 + \phi_{xy}\phi_{yx} & \phi_{xx}\phi_{xy} + \phi_{xy}\phi_{yy} \\ \phi_{yx}\phi_{xx} + \phi_{yy}\phi_{yx} & \phi_{yx}\phi_{xy} + \phi_{yy}^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

（c）前問より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}_t\left(\begin{pmatrix} x_{t+2} \\ y_{t+2} \end{pmatrix}\right) &= \mathrm{E}_t\left(\boldsymbol{\Phi}\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{t+2} \\ v_{t+2} \end{pmatrix}\right) \\
&= \boldsymbol{\Phi}\,\mathrm{E}_t\left(\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix}\right) + \mathrm{E}_t\left(\begin{pmatrix} u_{t+2} \\ v_{t+2} \end{pmatrix}\right) \\
&= \boldsymbol{\Phi}\,\mathrm{E}_t\left(\boldsymbol{\Phi}\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{t+1} \\ v_{t+1} \end{pmatrix}\right) + \mathrm{E}\left(\begin{pmatrix} u_{t+2} \\ v_{t+2} \end{pmatrix}\right) \\
&= \boldsymbol{\Phi}^2\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + \mathrm{E}_t\left(\begin{pmatrix} u_{t+1} \\ v_{t+1} \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} \phi_{xx}^2 + \phi_{xy}\phi_{yx} & \phi_{xx}\phi_{xy} + \phi_{xy}\phi_{yy} \\ \phi_{yx}\phi_{xx} + \phi_{yy}\phi_{yx} & \phi_{yx}\phi_{xy} + \phi_{yy}^2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + \mathrm{E}\left(\begin{pmatrix} u_{t+1} \\ v_{t+1} \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \left(\phi_{xx}^2 + \phi_{xy}\phi_{yx}\right)x_t + (\phi_{xx}\phi_{xy} + \phi_{xy}\phi_{yy})y_t \\ (\phi_{yx}\phi_{xx} + \phi_{yy}\phi_{yx})x_t + \left(\phi_{yx}\phi_{xy} + \phi_{yy}^2\right)y_t \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

したがって $\mathrm{E}_t(x_{t+2}) = \left(\phi_{xx}^2 + \phi_{xy}\phi_{yx}\right)x_t + (\phi_{xx}\phi_{xy} + \phi_{xy}\phi_{yy})y_t$.