

## 計量経済 II : 復習テスト 9

学籍番号 \_\_\_\_\_ 氏名 \_\_\_\_\_

2020 年 12 月 8 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。正答に修正した上で、復習テスト 9~14 を（左上で）ホチキス止めし、定期試験実施日（1 月 26 日の予定）にまとめて提出すること。

1. 大きさ  $n$  の  $(1+k)$  変量データを  $(\mathbf{y}, \mathbf{X})$  とする。  $\mathbf{y}$  の  $\mathbf{X}$  上への古典的正規線形回帰モデルは

$$\mathbf{y}|\mathbf{X} \sim N(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$$

$\boldsymbol{\beta}$  の OLS 推定量を  $\mathbf{b}$  とすると  $\mathbf{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$ 。  $\mathbf{R}$  を  $r \times k$  行列とする。以下を示しなさい。

(a)

$$\mathbf{b}|\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})$$

(b)

$$\mathbf{Rb}|\mathbf{X} \sim N(\mathbf{R}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}')$$

(c)

$$[\sigma^2 \mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1/2}(\mathbf{Rb} - \mathbf{R}\boldsymbol{\beta})|\mathbf{X} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_r)$$

(d)

$$(\mathbf{Rb} - \mathbf{R}\boldsymbol{\beta})' [\sigma^2 \mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}(\mathbf{Rb} - \mathbf{R}\boldsymbol{\beta})|\mathbf{X} \sim \chi^2(r)$$

2. 前問のモデルで次の検定問題を考える.

$$H_0 : \mathbf{R}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c} \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mathbf{R}\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{c}$$

残差ベクトルを  $\mathbf{e} := \mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{b}$  とする.  $\mathbf{X}$  を所与として  $\mathbf{b}$  と  $\mathbf{e}$  は独立.

(a)  $\sigma^2$  の不偏推定量  $s^2$  を式で定義しなさい.

(b)  $(n - k)s^2/\sigma^2$  はどのような分布をもつか?

(c) F 検定統計量を定義しなさい.

(d)  $H_0$  の下で  $F \sim F(r, n - k)$  となることを示しなさい.

解答例

1. (a)  $\mathbf{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$  は  $\mathbf{y}|\mathbf{X} \sim N(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{I}_n)$  の線形変換だから (条件付き) 正規分布. (条件付き) 期待値と分散は

$$\begin{aligned} E(\mathbf{b}|\mathbf{X}) &= E((\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}|\mathbf{X}) \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'E(\mathbf{y}|\mathbf{X}) \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \\ &= \boldsymbol{\beta} \\ \text{var}(\mathbf{b}|\mathbf{X}) &= \text{var}((\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}|\mathbf{X}) \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\text{var}(\mathbf{y}|\mathbf{X})\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\sigma^2\mathbf{I}_n\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \\ &= \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \end{aligned}$$

- (b)  $\mathbf{Rb}$  は  $\mathbf{b}|\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})$  の線形変換だから (条件付き) 正規分布. (条件付き) 期待値と分散は

$$\begin{aligned} E(\mathbf{Rb}|\mathbf{X}) &= \mathbf{R}E(\mathbf{b}|\mathbf{X}) \\ &= \mathbf{R}\boldsymbol{\beta} \\ \text{var}(\mathbf{Rb}|\mathbf{X}) &= \mathbf{R}\text{var}(\mathbf{b}|\mathbf{X})\mathbf{R}' \\ &= \mathbf{R}\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}' \\ &= \sigma^2\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}' \end{aligned}$$

- (c) 前問の結果を中心化すると

$$\mathbf{Rb} - \mathbf{R}\boldsymbol{\beta}|\mathbf{X} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}')$$

標準化すると

$$[\sigma^2\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1/2}(\mathbf{Rb} - \mathbf{R}\boldsymbol{\beta})|\mathbf{X} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_r)$$

- (d)  $\mathbf{z} := [\sigma^2\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1/2}(\mathbf{Rb} - \mathbf{R}\boldsymbol{\beta})$  とすると  $\mathbf{z} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_r)$  より

$$\begin{aligned} (\mathbf{Rb} - \mathbf{R}\boldsymbol{\beta})' [\sigma^2\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1} (\mathbf{Rb} - \mathbf{R}\boldsymbol{\beta}) &= \mathbf{z}'\mathbf{z} \\ &= z_1^2 + \cdots + z_r^2 \\ &\sim \chi^2(r) \end{aligned}$$

2. (a)

$$\begin{aligned} s^2 &:= \frac{\mathbf{e}'\mathbf{e}}{n-k} \\ &= \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^n e_i^2 \end{aligned}$$

- (b)

$$\frac{(n-k)s^2}{\sigma^2}|\mathbf{X} \sim \chi^2(n-k)$$

(c) 1(d) の  $\mathbf{R}\boldsymbol{\beta}$  を  $\mathbf{c}$ ,  $\sigma^2$  を  $s^2$  に置き換えて, 自由度  $r$  で割ればよいので

$$F := \frac{(\mathbf{R}\mathbf{b} - \mathbf{c})' [s^2 \mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{R}']^{-1} (\mathbf{R}\mathbf{b} - \mathbf{c})}{r}$$

(d)  $H_0$  の下で

$$\begin{aligned} F &:= \frac{(\mathbf{R}\mathbf{b} - \mathbf{c})' [s^2 \mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{R}']^{-1} (\mathbf{R}\mathbf{b} - \mathbf{c})}{r} \\ &= \frac{(\mathbf{R}\mathbf{b} - \mathbf{R}\boldsymbol{\beta})' [s^2 \mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{R}']^{-1} (\mathbf{R}\mathbf{b} - \mathbf{R}\boldsymbol{\beta})}{r} \\ &= \frac{(\mathbf{R}\mathbf{b} - \mathbf{R}\boldsymbol{\beta})' [\sigma^2 \mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{R}']^{-1} (\mathbf{R}\mathbf{b} - \mathbf{R}\boldsymbol{\beta})/r}{[(n-k)s^2/\sigma^2]/(n-k)} \end{aligned}$$

以下を示せばよい.

- i.  $(\mathbf{R}\mathbf{b} - \mathbf{R}\boldsymbol{\beta})' [\sigma^2 \mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{R}']^{-1} (\mathbf{R}\mathbf{b} - \mathbf{R}\boldsymbol{\beta}) | \mathbf{X} \sim \chi^2(r)$
  - ii.  $(n-k)s^2/\sigma^2 | \mathbf{X} \sim \chi^2(n-k)$
  - iii.  $\mathbf{X}$  を所与として分子と分母は独立
- i, ii は既に示した. また分子は  $\mathbf{b}$  の関数, 分母は  $e$  の関数で,  $\mathbf{b}$  と  $e$  は独立なので iii も成立.