

計量経済 II : 復習テスト 12

学籍番号 _____ 氏名 _____

2021 年 1 月 5 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。正答に修正した上で，復習テスト 9～14 を（左上で）ホチキス止めし，定期試験実施日（1 月 26 日の予定）にまとめて提出すること。

1. 定数項なしの AR(p) モデルは，任意の t について

$$\begin{aligned}\phi(L)y_t &= w_t \\ \{w_t\} &\sim \text{WN}(\sigma^2)\end{aligned}$$

- (a) 次式を示しなさい。

$$\phi(L) = \phi(1)L + \phi^*(L)(1-L)$$

ただし $\phi^*(L)$ は $p-1$ 次のラグ多項式。

- (b) AR モデルが次式に変形できることを示しなさい。

$$\phi^*(L)\Delta y_t = -\phi(1)y_{t-1} + w_t$$

- (c) $\{y_t\}$ が I(1) なら $\phi(1) = 0$ すなわち $\phi(\cdot)$ が単位根をもつことを示しなさい。

2. $\{y_t\}$ を CI(1,1) とする. 定数項ありの VAR(p) モデルは, 任意の t について

$$\begin{aligned}\Phi(L)(y_t - \mu) &= w_t \\ \{w_t\} &\sim \text{WN}(\Sigma)\end{aligned}$$

(a) 次式を示しなさい.

$$\Phi(L) = \Phi(1)L + \Phi^*(L)(1 - L)$$

ただし $\Phi^*(L)$ は $p - 1$ 次のラグ多項式行列.

(b) VAR モデルが次式に変形できることを示しなさい.

$$\Phi^*(L)\Delta y_t = -\Phi(1)(y_{t-1} - \mu) + w_t$$

(c) 共積分行列 Γ を用いて VAR モデルが次式に変形できることを示しなさい.

$$\Phi^*(L)\Delta y_t = -\Lambda\Gamma'(y_{t-1} - \mu) + w_t$$

(d) VAR モデルが次の VECM に変形できることを示しなさい.

$$\Phi^*(L)\Delta y_t = -\Lambda(\Gamma'y_{t-1} - \beta) + w_t$$

解答例

1. (a) $\phi(L)$ を式変形すると

$$\phi(L) = \phi(1)L + \phi(L) - \phi(1)L$$

$\phi(z) - \phi(1)z$ は $z = 1$ で 0 なので, 因数分解より任意の z について

$$\phi(z) - \phi(1)z = \phi^*(z)(1 - z)$$

ただし $\phi^*(\cdot)$ は $p - 1$ 次の多項式. したがって

$$\phi(L) = \phi(1)L + \phi^*(L)(1 - L)$$

(b) 前問の結果を代入すると, 任意の t について

$$\begin{aligned}\phi(L)y_t &= [\phi(1)L + \phi^*(L)(1 - L)]y_t \\ &= \phi(1)Ly_t + \phi^*(L)(1 - L)y_t \\ &= \phi(1)y_{t-1} + \phi^*(L)\Delta y_t\end{aligned}$$

これを AR モデルに代入すると, 任意の t について

$$\phi(1)y_{t-1} + \phi^*(L)\Delta y_t = w_t$$

すなわち

$$\phi^*(L)\Delta y_t = -\phi(1)y_{t-1} + w_t$$

(c) $\{y_t\}$ が $I(1)$ なら $\{\Delta y_t\}$ は $I(0)$ なので左辺は $I(0)$. したがって右辺も $I(0)$ なので $\phi(1) = 0$.

2. (a) $\Phi(L)$ の第 (i, j) 成分 $\phi_{i,j}(L)$ を式変形すると

$$\phi_{i,j}(L) = \phi_{i,j}(1)L + \phi_{i,j}(L) - \phi_{i,j}(1)L$$

$\phi_{i,j}(z) - \phi_{i,j}(1)z$ は $z = 1$ で 0 なので, 因数分解より任意の z について

$$\phi_{i,j}(z) - \phi_{i,j}(1)z = \phi_{i,j}^*(z)(1 - z)$$

ただし $\phi_{i,j}^*(\cdot)$ は $p - 1$ 次の多項式. したがって

$$\phi_{i,j}(L) = \phi_{i,j}(1)L + \phi_{i,j}^*(L)(1 - L)$$

(b) 前問の結果を代入すると, 任意の t について

$$\begin{aligned}\Phi(L)(y_t - \mu) &= [\Phi(1)L + \Phi^*(L)(1 - L)](y_t - \mu) \\ &= \Phi(1)L(y_t - \mu) + \Phi^*(L)(1 - L)(y_t - \mu) \\ &= \Phi(1)(y_{t-1} - \mu) + \Phi^*(L)\Delta y_t\end{aligned}$$

これを VAR モデルに代入すると, 任意の t について

$$\Phi(1)(y_{t-1} - \mu) + \Phi^*(L)\Delta y_t = w_t$$

すなわち

$$\Phi^*(L)\Delta y_t = -\Phi(1)(y_{t-1} - \mu) + w_t$$

(c) $\{y_t\}$ は I(1) なので $\{\Delta y_t\}$ は I(0). したがって左辺は I(0) なので右辺も I(0). 共和分より $\{\Gamma' y_t\}$ が I(0) なので

$$\Phi^*(L)\Delta y_t = -\Lambda \Gamma'(y_{t-1} - \mu) + w_t$$

(d) 前問の結果を式変形すると, 任意の t について

$$\begin{aligned}\Phi^*(L)\Delta y_t &= -\Lambda \Gamma'(y_{t-1} - \mu) + w_t \\ &= -\Lambda(\Gamma' y_{t-1} - \Gamma' \mu) + w_t \\ &= -\Lambda(\Gamma' y_{t-1} - \beta) + w_t\end{aligned}$$

ただし $\beta := \Gamma' \mu$.