

計量経済 II : 復習テスト 13

学籍番号 _____ 氏名 _____

2021 年 1 月 12 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。正答に修正した上で、復習テスト 9~14 を（左上で）ホチキス止めし、定期試験実施日（1 月 26 日の予定）にまとめて提出すること。

1. $\{w_t\}$ を ARCH(1) 過程とする。すなわち任意の t について

$$\begin{aligned}w_t &= \sigma_t z_t \\ \sigma_t^2 &= c + \alpha w_{t-1}^2 \\ \{z_t\} &\sim \text{IID}(0, 1)\end{aligned}$$

ただし $c > 0$, $\alpha \geq 0$.

- (a) $E_{t-1}(w_t)$ を求めなさい。

- (b) $\text{var}_{t-1}(w_t)$ を w_{t-1} で表しなさい。

- (c) $E(w_t)$ を求めなさい。

- (d) $\text{var}(w_t)$ を $\text{var}(w_{t-1})$ で表しなさい。

2. $\{w_t\}$ を GARCH(1,1) 過程とする. すなわち任意の t について

$$\begin{aligned}w_t &= \sigma_t z_t \\ \sigma_t^2 &= c + \alpha w_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \\ \{z_t\} &\sim \text{IID}(0, 1)\end{aligned}$$

ただし $c > 0$, $\alpha, \beta \geq 0$. 任意の t について $v_t := w_t^2 - \sigma_t^2$ とする.

(a) $\text{var}_{t-1}(w_t)$ を w_{t-1}, w_{t-2}, \dots で表しなさい.

(b) $\text{var}(w_t)$ を $\text{var}(w_{t-1})$ で表しなさい.

(c) $\{v_t\}$ がホワイト・ノイズなら $\{w_t^2\}$ は ARMA(1,1) であることを示しなさい.

解答例

1. (a) 時点 $t-1$ で σ_t^2 は既知であり, $\{z_t\}$ は IID(0, 1) なので, 任意の t について

$$\begin{aligned} E_{t-1}(w_t) &= E_{t-1}(\sigma_t z_t) \\ &= \sigma_t E_{t-1}(z_t) \\ &= \sigma_t E(z_t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- (b) 前問より任意の t について

$$\begin{aligned} \text{var}_{t-1}(w_t) &= E_{t-1}(w_t^2) \\ &= E_{t-1}(\sigma_t^2 z_t^2) \\ &= \sigma_t^2 E_{t-1}(z_t^2) \\ &= \sigma_t^2 E(z_t^2) \\ &= \sigma_t^2 \text{var}(z_t) \\ &= \sigma_t^2 \\ &= c + \alpha w_{t-1}^2 \end{aligned}$$

- (c) 前々問と繰り返し期待値の法則より, 任意の t について

$$\begin{aligned} E(w_t) &= E(E_{t-1}(w_t)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- (d) 前問と繰り返し期待値の法則より, 任意の t について

$$\begin{aligned} \text{var}(w_t) &= E(w_t^2) \\ &= E(E_{t-1}(w_t^2)) \\ &= E(\text{var}_{t-1}(w_t)) \\ &= E(c + \alpha w_{t-1}^2) \\ &= c + \alpha E(w_{t-1}^2) \\ &= c + \alpha_1 \text{var}(w_{t-1}) \end{aligned}$$

2. (a) 逐次代入より任意の t について

$$\begin{aligned} \text{var}_{t-1}(w_t) &= \sigma_t^2 \\ &= c + \alpha w_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \\ &= c + \alpha w_{t-1}^2 + \beta (c + \alpha w_{t-2}^2 + \beta \sigma_{t-2}^2) \\ &= \dots \\ &= (1 + \beta + \beta^2 + \dots) c + \alpha (w_{t-1}^2 + \beta w_{t-2}^2 + \beta^2 w_{t-3}^2 + \dots) \end{aligned}$$

(b) 任意の t について

$$\begin{aligned}\text{var}(w_t) &= \mathbf{E}(w_t^2) \\ &= \mathbf{E}(\mathbf{E}_{t-1}(w_t^2)) \\ &= \mathbf{E}(\text{var}_{t-1}(w_t)) \\ &= \mathbf{E}(\sigma_t^2) \\ &= \mathbf{E}(c + \alpha w_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2) \\ &= c + \alpha \mathbf{E}(w_{t-1}^2) + \beta \mathbf{E}(\sigma_{t-1}^2) \\ &= c + \alpha \text{var}(w_{t-1}) + \beta \text{var}(w_{t-1}) \\ &= c + (\alpha + \beta) \text{var}(w_{t-1})\end{aligned}$$

(c) 任意の t について

$$\begin{aligned}w_t^2 &\equiv \sigma_t^2 + v_t \\ &= c + \alpha w_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 + v_t \\ &= c + (\alpha + \beta)w_{t-1}^2 - \beta(w_{t-1}^2 - \sigma_{t-1}^2) + v_t \\ &= c + (\alpha + \beta)w_{t-1}^2 + v_t - \beta v_{t-1}\end{aligned}$$

したがって $\{v_t\}$ がホワイト・ノイズなら $\{w_t^2\}$ は ARMA(1,1).