2019年6月26日

第12回　多変量時系列分析（7.3–7.4）

村澤 康友

今日のポイント

1. VAR(p)モデルは$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{\Phi}_1 \boldsymbol{y}_{t-1} + \cdots + \boldsymbol{\Phi}_p \boldsymbol{y}_{t-p} + \boldsymbol{w}_t$，ただし$\{\boldsymbol{w}_t\}$はホワイト・ノイズ.
2. VAR過程をVMA過程に変換すると，インパルス応答関数が得られる．これはある変数に対するショックの他の変数への波及効果をとらえる.
3. ある変数の予測に他の変数が役立つことをグレンジャー因果という．その有無を検定して多変量モデルの必要性を判断する.

今日のポイント

4. 差分が定常となる過程を和分過程という．和分過程の線形結合が定常となる過程を共和分過程という．共和分過程はベクトル誤差修正モデル（VECM）で表現できる．
5. Engle–Granger検定で共和分の有無を検定できる．

目次

1	定常過程	5
2	VARモデル（p. 143）	7
3	インパルス応答関数（p. 144）	10
4	グレンジャー因果性（p. 145）	14
5	モデル選択	16
6	共和分とVECM（p. 139）	19
7	共和分検定（p. 140）	23

8 今日の課題 25

9 次回までの準備 26

1　定常過程

N 変量時系列 $\{\boldsymbol{y}_t\}$ の予測を考える.

定義 **1.** $\mathrm{E}(\boldsymbol{y}_t)$ と $\mathrm{cov}(\boldsymbol{y}_t, \boldsymbol{y}_{t-s})$ が t に依存しない $\{\boldsymbol{y}_t\}$ を（弱）定常過程という.

定義 **2.** $\{\boldsymbol{y}_t\}$ の s 次の自己共分散行列は

$$\boldsymbol{\Gamma}(s) := \mathrm{cov}(\boldsymbol{y}_t, \boldsymbol{y}_{t-s})$$

定義 **3.** 平均$\mathbf{0}$で系列相関のない定常過程をホワイト・ノイズという.

注 1. 分散共分散行列が$\boldsymbol{\Sigma}$なら$\mathrm{WN}(\boldsymbol{\Sigma})$と書く.

2　VARモデル（p. 143）

定常過程$\{\boldsymbol{y}_t\}$の予測を考える.

定義 **4.** p次のベクトル自己回帰（VAR）モデルは

$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{\Phi}_1 \boldsymbol{y}_{t-1} + \cdots + \boldsymbol{\Phi}_p \boldsymbol{y}_{t-p} + \boldsymbol{w}_t$$
$$\{\boldsymbol{w}_t\} \sim \mathrm{WN}(\boldsymbol{\Sigma})$$

注 2. $\mathrm{VAR}(p)$と書く.

注 3. VARMAモデルはMA部分の係数が一意に定まらず,
推定も煩雑なのであまり使われない.

注 4. gretlでVARモデルを推定する手順は以下の通り.

1. メニューから「モデル」→「時系列」→「ベクトル自己回帰モデル」を選択.
2. 「ラグ次数」を入力.
3. 「内生変数」を選択.
4. 「外生変数」は選択しない.
5. その他は必要に応じて設定（基本的にデフォルト値のままでよい）.
6. 「OK」をクリック.

練習 **1.** c71.gdtは1995Q1–2010Q4の日本経済の時系列データであり，以下の2つの変数をもつ.

1. UR（失業率）
2. GDPG（実質GDP成長率）

GDPGとΔURのVAR(2)モデルを推定し，p. 147，図7-14と結果が一致することを確認してワードに貼り付けなさい.

3　インパルス応答関数（p. 144）

定常なVAR過程はVMA(∞)過程で表現できる.
例えばVAR(1)なら

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_t &= \boldsymbol{c} + \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{y}_{t-1} + \boldsymbol{w}_t \\
&= \boldsymbol{c} + \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{y}_{t-2} + \boldsymbol{w}_{t-1}\right) + \boldsymbol{w}_t \\
&= \dots \\
&= \left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{\Phi}^2 + \cdots\right)\boldsymbol{c} + \boldsymbol{w}_t + \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{w}_{t-1} + \boldsymbol{\Phi}^2\boldsymbol{w}_{t-2} + \cdots
\end{aligned}
$$

一般に

$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Psi}_0 \boldsymbol{w}_t + \boldsymbol{\Psi}_1 \boldsymbol{w}_{t-1} + \boldsymbol{\Psi}_2 \boldsymbol{w}_{t-2} + \cdots$$

$$\{\boldsymbol{w}_t\} \sim \mathrm{WN}(\boldsymbol{\Sigma})$$

定義 **5.** $\boldsymbol{\Psi}_0, \boldsymbol{\Psi}_1, \ldots$ の第 (i,j) 成分を $\{y_{t,i}\}$ の $\{y_{t,j}\}$ に対するインパルス応答関数という.

注 5. $y_{t,j}$ に対するショック $w_{t,j}$ の他の変数への波及効果をとらえる.

注 6. 推定したVARモデルのインパルス応答関数をプロットする手順は以下の通り.

1. 推定結果の画面のメニューから「グラフ」→「インパルス応答」を選択.
2. 「予測する期間数」を入力.
3. 「ブートストラップ信頼区間を含む」をチェック.
4. 信頼係数$1-\alpha$を入力（通常は0.95）.
5. 「コレスキー順序」を設定（先行する変数が上）.
6. 「OK」をクリック.

練習 **2.** GDPGとΔURのVAR(2)モデルを推定してインパルス応答関数を10期間プロットし，p. 148，図7-15と結果が一致することを確認してワードに貼り付けなさい．またコレスキー順序を入れ替えてインパルス応答関数を比較し（特に第0期），結果をワードに貼り付けなさい．

4　グレンジャー因果性（p. 145）

$\{y_{t,i}\}$の予測に$\{y_{t,j}\}$が役立つかどうかを検定する.
次のVARモデルを仮定する.

$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{\Phi}_1 \boldsymbol{y}_{t-1} + \cdots + \boldsymbol{\Phi}_p \boldsymbol{y}_{t-p} + \boldsymbol{w}_t$$
$$\{\boldsymbol{w}_t\} \sim \mathrm{WN}(\boldsymbol{\Sigma})$$

$\{y_{t,i}\}$に対する$\{y_{t,j}\}$のグレンジャー因果性の検定問題は

H_0 : $\boldsymbol{\Phi}_1, \ldots, \boldsymbol{\Phi}_p$の第$(i,j)$成分は0　vs　H_1 : 制約なし

gretlはVARモデルの推定の際に上記のF検定の結果も出力する. p値が有意水準（通常は0.05）以下ならH_0を棄却.

練習 **3.** GDPGとΔURのVAR(2)モデルを推定し，グレンジャー因果性の検定結果がp. 147，図7-14と一致することを確認してワードに貼り付けなさい.

5　モデル選択

VARモデルの次数pは情報量基準（AIC・SBIC・HQC）で選択する.
モデルの当てはまりが良く，次数が低いほど情報量基準は小さい.

gretlでVARモデルの情報量基準を比較する手順は以下の通り.

1. メニューから「モデル」→「時系列」→「VARラグ選択」を選択.
2. 「最大ラグ」を入力.
3. 「内生変数」を選択.
4. 「外生変数」は選択しない.
5. その他は必要に応じて設定（基本的にデフォルト値のままでよい）.
6. 「OK」をクリック.

練習 **4.** GDPGとΔURのVARモデルの情報量基準を$p = 1, \ldots, 8$の範囲で比較し，結果をワードに貼り付けなさい.

6　共和分とVECM（p. 139）

定義 **6.** $\{\Delta^d \boldsymbol{y}_t\}$ が定常なら $\{\boldsymbol{y}_t\}$ を d 次の和分過程という.

注 7. $\mathrm{I}(d)$ と書く.

定義 **7.** $\{\boldsymbol{y}_t\}$ が $\mathrm{I}(d)$ で $\{\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{y}_t\}$ が $\mathrm{I}(d-b)$ なら $\{\boldsymbol{y}_t\}$ を (d,b) 次の共和分過程，$\boldsymbol{\alpha}$ を共和分ベクトルという.

注 8. $\mathrm{CI}(d,b)$ と書く.

注 9. CI(1,1)はベクトル誤差修正モデル（VECM）で表現できる．すなわち

$$\Delta \boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{\Phi}_1 \Delta \boldsymbol{y}_{t-1} + \cdots + \boldsymbol{\Phi}_p \Delta \boldsymbol{y}_{t-p} - \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\alpha}' \boldsymbol{y}_{t-1} + \boldsymbol{w}_t$$

$$\{\boldsymbol{w}_t\} \sim \mathrm{WN}(\boldsymbol{\Sigma})$$

ただし $-\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\alpha}' \boldsymbol{y}_{t-1}$ は誤差修正項.

gretlでVECMを推定する手順は以下の通り.

1. メニューから「モデル」→「時系列」→「ベクトル誤差修正モデル」を選択.
2. 「ラグ次数」を入力.
3. 「ランク」を入力（とりあえずデフォルト値のままでよい）.
4. 「内生変数」を選択.
5. 「外生変数」は選択しない.
6. その他は必要に応じて設定（基本的にデフォルト値のままでよい）.
7. 「OK」をクリック.

練習 **5.** c73.gdt は1995Q1–2010Q4の日本経済の時系列データであり，以下の2つの変数をもつ.

1. GDP（実質GDP）
2. CP（実質民間最終消費支出）

log(GDP) と log(CP) の時系列プロットを描き，ワードに貼り付けなさい.

練習 **6.** log(GDP) と log(CP) のVECMを推定し，結果をワードに貼り付けなさい.

7　共和分検定（p. 140）

$\{\boldsymbol{y}_t\}$がCI(1,1)か否かを検定したい.
共和分検定問題は

$$H_0 : \{\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{y}_t\}\text{はI(1)} \quad \text{vs} \quad H_1 : \{\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{y}_t\}\text{はI(0)}$$

Engle–Granger検定はOLSで$\boldsymbol{\alpha}$の推定値$\hat{\boldsymbol{\alpha}}$を求め，$\{\hat{\boldsymbol{\alpha}}'\boldsymbol{y}_t\}$の単位根検定を行う.

gretl で Engle–Granger 検定を実行する手順は以下の通り.

1. メニューから「モデル」→「時系列」→「共和分検定」→「エンゲル＝グレンジャー」を選択.
2. 「ラグ次数」を入力.
3. 「検定する変数」を選択.
4. その他は必要に応じて設定（基本的にデフォルト値のままでよい）.
5. 「OK」をクリック.

練習 **7.** log(GDP) と log(CP) について Engle–Granger 検定を実行し，p. 142，図 7-12 と結果が一致することを確認してワードに貼り付けなさい.

8　今日の課題

練習 1–7 の実行結果をワードに貼り付け，学籍番号・氏名を記入して My KONAN で提出しなさい.

9　次回までの準備

提出　今日の課題（次回の授業開始前まで）

復習　教科書第7章3–4節

予習　教科書第8章