中級統計学：第 2 回中間試験／経済統計 I：最終試験

村澤 康友

提出期限：2021 年 6 月 7 日 (月)
提出方法：My KONAN（甲南）／授業支援システム（府大）

注意：指定のワードファイルの解答用紙に解答を入力し，pdf ファイルに変換して提出すること．何を参照してもよいが，決して他人と相談しないこと．また自分の解答を決して他人に教えないこと．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと（部分点は大いに与えるが，結果のみの解答は 0 点とする）.

1. （20 点）以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）.
   (a) 周辺確率密度関数
   (b) 条件付き期待値
   (c) （確率変数の）独立性
   (d) 確率収束
2. （30 点）(X, Y) は次の 2 変量正規分布に従う.
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim \mathrm{N}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \right)$$
   (a) X と Y の相関係数を求めなさい.
   (b) $U := Y - 2X$ とする．U の分布を求めなさい.
   (c) $\Pr[|U| < 1]$ を求めなさい.
3. （50 点）(X, Y) は次の同時分布に従う.

$X\backslash Y$	0	1	2
0	1/10	1/10	1/10
1	2/10	2/10	3/10

   (a) X と Y の周辺分布をそれぞれ求めなさい.
   (b) X と Y の 1 次と 2 次の積率をそれぞれ求めなさい.
   (c) X と Y の分散をそれぞれ求めなさい.
   (d) XY の分布を求めなさい.
   (e) X と Y の共分散を求めなさい.

解答例

1. 確率の基本用語
   (a) X の周辺確率密度関数は，任意の x について

$$f_X(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y$$

   (b) $Y = y$ が与えられたときの X の条件付き期待値は

$$\mathrm{E}(X|Y=y) := \begin{cases} \sum_x x p_{X|Y}(x|Y=y) & \text{（離散）} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|Y=y)\,\mathrm{d}x & \text{（連続）} \end{cases}$$

   (c) 任意の (x,y) について

$$f_{X|Y}(x|Y=y) = f_X(x)$$

   なら X と Y は独立という.

   (d) 任意の $\epsilon > 0$ について

$$\lim_{n\to\infty} \Pr[|X_n - c| < \epsilon] = 1$$

   なら $\{X_n\}$ は c に確率収束するという.

   - 「c に」と収束先を明示しなければ 0 点（「ϵ に」とする誤答があった).

2. 2 変量正規分布
   (a)

$$\begin{aligned} \mathrm{corr}(X,Y) &= \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}\sqrt{\mathrm{var}(Y)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{4}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   - 結果のみの解答は 0 点.

   (b)

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(U) &= \mathrm{E}(Y - 2X) \\ &= \mathrm{E}(Y) - 2\,\mathrm{E}(X) \\ &= 3 - 2 \cdot 2 \\ &= -1 \\ \mathrm{var}(U) &= \mathrm{var}(Y - 2X) \\ &= \mathrm{var}(Y) - 2\,\mathrm{cov}(2X,Y) + \mathrm{var}(2X) \\ &= \mathrm{var}(Y) - 4\,\mathrm{cov}(X,Y) + 4\,\mathrm{var}(X) \\ &= 4 - 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

   正規分布の線形変換は正規分布なので

$$U \sim \mathrm{N}(-1, 4)$$

   - 平均 2 点，分散 4 点，分布 4 点.

(c) $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ とすると

$$
\begin{aligned}
\Pr[|U|<1] &= \Pr[-1<U<1] \\
&= \Pr\left[\frac{-1-(-1)}{2} < \frac{U-1}{2} < \frac{1-(-1)}{2}\right] \\
&= \Pr[0<Z<1] \\
&= \Pr[Z>0] - \Pr[Z>1] \\
&= 0.5 - 0.158655 \\
&= 0.341345
\end{aligned}
$$

3. 2 変量離散分布

(a)

$$
\begin{aligned}
X &= \begin{cases} 0 & \text{with pr. } 3/10 \\ 1 & \text{with pr. } 7/10 \end{cases} \\
Y &= \begin{cases} 0 & \text{with pr. } 3/10 \\ 1 & \text{with pr. } 3/10 \\ 2 & \text{with pr. } 4/10 \end{cases}
\end{aligned}
$$

- 各 5 点.

(b)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &:= 0 \cdot \frac{3}{10} + 1 \cdot \frac{7}{10} \\
&= \frac{7}{10} \\
\mathrm{E}\left(X^2\right) &:= 0^2 \cdot \frac{3}{10} + 1^2 \cdot \frac{7}{10} \\
&= \frac{7}{10} \\
\mathrm{E}(Y) &:= 0 \cdot \frac{3}{10} + 1 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{4}{10} \\
&= \frac{11}{10} \\
\mathrm{E}\left(Y^2\right) &:= 0^2 \cdot \frac{3}{10} + 1^2 \cdot \frac{3}{10} + 2^2 \cdot \frac{4}{10} \\
&= \frac{19}{10}
\end{aligned}
$$

- 1 次の積率各 2 点，2 次の積率各 3 点.

(c)

$$
\begin{aligned}
\operatorname{var}(X) &= \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2 \\
&= \frac{7}{10} - \left(\frac{7}{10}\right)^2 \\
&= \frac{70}{100} - \frac{49}{100} \\
&= \frac{21}{100} \\
\operatorname{var}(Y) &= \mathrm{E}\left(Y^2\right) - \mathrm{E}(Y)^2 \\
&= \frac{19}{10} - \left(\frac{11}{10}\right)^2 \\
&= \frac{190}{100} - \frac{121}{100} \\
&= \frac{69}{100}
\end{aligned}
$$

- 各 5 点.

(d)

$$
XY = \begin{cases} 0 & \text{with pr. } 5/10 \\ 1 & \text{with pr. } 2/10 \\ 2 & \text{with pr. } 3/10 \end{cases}
$$

(e)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(XY) &:= 0 \cdot \frac{5}{10} + 1 \cdot \frac{2}{10} + 2 \cdot \frac{3}{10} \\
&= \frac{8}{10} \\
&= \frac{4}{5} \\
\operatorname{cov}(X, Y) &= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\
&= \frac{4}{5} - \frac{7}{10} \cdot \frac{11}{10} \\
&= \frac{80}{100} - \frac{77}{100} \\
&= \frac{3}{100}
\end{aligned}
$$