

## 中級統計学／経済統計 II：復習テスト 16

学籍番号\_\_\_\_\_氏名\_\_\_\_\_

2021年6月15日（甲南）／21日（府大）

**注意：**すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。正答に修正した上で、復習テスト 14～20 を（左上で）ホチキス止めし、第 3 回中間試験実施日にまとめて提出すること。

1.  $N(\mu, \sigma^2)$  からの無作為標本を  $(X_1, \dots, X_n)$  とする。  $\mu$  は既知とする。

(a) 標本分散  $\hat{\sigma}^2$  を式で定義しなさい。

(b)  $n\hat{\sigma}^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n)$  となることを示しなさい。

(c)  $\sigma^2 = 1$  とする。  $n = 10$  のとき  $\hat{\sigma}^2 > 2$  の確率を  $\chi^2$  分布表を利用して求めなさい。

2.  $N(\mu, \sigma^2)$  からの無作為標本を  $(X_1, \dots, X_n)$  とする.  $\mu, \sigma^2$  は未知とする.

(a) 標本平均  $\bar{X}$  を式で定義しなさい.

(b) 標本分散  $s^2$  を式で定義しなさい.

(c)  $(n-1)s^2/\sigma^2$  はどのような分布をもつか?

(d)  $(\bar{X} - \mu)/\sqrt{s^2/n}$  はどのような分布をもつか?

(e)  $\mu = 0$  とする.  $n = 9, s^2 = 1$  のとき  $\bar{X} > 1$  の確率を t 分布表を利用して求めなさい.

解答例

1. (a)

$$\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$$

(b)

$$\begin{aligned} \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} &= \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \\ &= \left(\frac{X_1 - \mu}{\sigma}\right)^2 + \dots + \left(\frac{X_n - \mu}{\sigma}\right)^2 \end{aligned}$$

各項は独立な  $N(0,1)$  の 2 乗.

(c)

$$\begin{aligned} \Pr[\hat{\sigma}^2 > 2] &= \Pr\left[\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} > \frac{2n}{\sigma^2}\right] \\ &= \Pr[\chi^2(10) > 20] \\ &\approx .03 \end{aligned}$$

2. (a)

$$\bar{X} := \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

(b)

$$s^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

(c)

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

(d)

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} \sim t(n-1)$$

(e)

$$\begin{aligned} \Pr[\bar{X} > 1] &= \Pr\left[\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} > \frac{1 - \mu}{\sqrt{s^2/n}}\right] \\ &= \Pr[t(8) > 3] \\ &\approx .008 \end{aligned}$$