

## 中級統計学／経済統計 II：復習テスト 18

学籍番号 \_\_\_\_\_ 氏名 \_\_\_\_\_

2021 年 6 月 22 日（甲南）／ 28 日（府大）

**注意：**すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。正答に修正した上で、復習テスト 14～20 を（左上で）ホチキス止めし、第 3 回中間試験実施日にまとめて提出すること。

1.  $\text{Bin}(1, p)$  から抽出した大きさ  $n$  の無作為標本を  $(X_1, \dots, X_n)$  とする。

(a)  $(X_1, \dots, X_n) = \boldsymbol{x}$  の確率を求めなさい。

(b)  $(X_1, \dots, X_n) = \boldsymbol{x}$  を観測したときの  $p$  の尤度関数を書きなさい。

(c)  $(X_1, \dots, X_n) = \boldsymbol{x}$  を観測したときの  $p$  の対数尤度関数を書きなさい。

(d) (対数) 尤度最大化の 1 階の条件を導きなさい。

(e)  $p$  の ML 推定値と ML 推定量を求めなさい。

2.  $N(\mu, \sigma^2)$  から抽出した大きさ  $n$  の無作為標本を  $(X_1, \dots, X_n)$  とする.

(a)  $(X_1, \dots, X_n) = \mathbf{x}$  の確率密度を書きなさい.

(b)  $(X_1, \dots, X_n) = \mathbf{x}$  を観測したときの  $(\mu, \sigma^2)$  の尤度関数を書きなさい.

(c)  $(X_1, \dots, X_n) = \mathbf{x}$  を観測したときの  $(\mu, \sigma^2)$  の対数尤度関数を書きなさい.

(d) (対数) 尤度最大化の 1 階の条件を導きなさい.

(e)  $(\mu, \sigma^2)$  の ML 推定値と ML 推定量を求めなさい.

解答例

1. (a)  $X_1, \dots, X_n$  は独立なので

$$\begin{aligned}\Pr[(X_1, \dots, X_n) = \mathbf{x}] &= \Pr[(X_1, \dots, X_n) = (x_1, \dots, x_n)] \\ &= \Pr[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] \\ &= \Pr[X_1 = x_1] \cdots \Pr[X_n = x_n] \\ &= p^{x_1} (1-p)^{1-x_1} \cdots p^{x_n} (1-p)^{1-x_n} \\ &= p^{x_1 + \cdots + x_n} (1-p)^{(1-x_1) + \cdots + (1-x_n)} \\ &= p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{n - \sum_{i=1}^n x_i}\end{aligned}$$

(b)

$$L(p; \mathbf{x}) = p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{n - \sum_{i=1}^n x_i}$$

(c)

$$\ell(p; \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i \ln p + \left( n - \sum_{i=1}^n x_i \right) \ln(1-p)$$

(d) 1階の条件は

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p^*} - \frac{n - \sum_{i=1}^n x_i}{1-p^*} = 0$$

すなわち

$$(1-p^*) \sum_{i=1}^n x_i - p^* \left( n - \sum_{i=1}^n x_i \right) = 0$$

(e) ML 推定値は

$$p^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

ML 推定量は

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

2. (a)  $X_1, \dots, X_n$  は独立なので

$$\begin{aligned}f_{X_1, \dots, X_n}(\mathbf{x}; \mu, \sigma^2) &= f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n; \mu, \sigma^2) \\ &= f_{X_1}(x_1; \mu, \sigma^2) \cdots f_{X_n}(x_n; \mu, \sigma^2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x_1 - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \cdots \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x_n - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{(x_1 - \mu)^2}{2\sigma^2} - \cdots - \frac{(x_n - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= (2\pi)^{-n/2} (\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)\end{aligned}$$

(b)

$$L(\mu, \sigma^2; \mathbf{x}) = (2\pi)^{-n/2} (\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

(c)

$$\ell(\mu, \sigma^2; \mathbf{x}) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

(d) 1 階の条件は

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sigma^{2*}} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu^*) &= 0 \\ -\frac{n}{2\sigma^{2*}} + \frac{1}{2\sigma^{2*2}} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu^*)^2 &= 0\end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu^*) &= 0 \\ -n\sigma^{2*} + \sum_{i=1}^n (x_i - \mu^*)^2 &= 0\end{aligned}$$

(e) ML 推定値は

$$\begin{aligned}\mu^* &= \bar{x} \\ \sigma^{2*} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\end{aligned}$$

ML 推定量は

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= \bar{X} \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\end{aligned}$$