

## 中級統計学／経済統計 II：復習テスト 25

学籍番号 \_\_\_\_\_ 氏名 \_\_\_\_\_

2021年7月20日（甲南）／7月26日（府大）

**注意：**すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。正答に修正した上で、復習テスト 21～26 を（左上で）ホチキス止めし、定期試験実施日にまとめて提出すること。

1. 2変量データを  $((y_1, x_1), \dots, (y_n, x_n))$  とする。  $y_i$  の  $x_i$  上への定数項のない古典的線形回帰モデルは

$$\begin{aligned}y_i &= \beta x_i + u_i \\E(u_i) &= 0 \\ \text{var}(u_i) &= \sigma^2 \\ \text{cov}(u_i, u_j) &= 0 \quad \text{for } i \neq j\end{aligned}$$

$\beta$  の OLS 推定量を  $b$  とする。

(a)  $b$  を式で与えなさい。

(b)  $b$  の期待値を求めなさい。

(c)  $b$  の分散を求めなさい。

2. 2変量データを  $((y_1, x_1), \dots, (y_n, x_n))$  とする.  $y_i$  の  $x_i$  上への定数項のない古典的正規線形回帰モデルは

$$y_i = \beta x_i + u_i$$
$$\{u_i\} \sim \text{IN}(0, \sigma^2)$$

$\beta$  の OLS 推定量を  $b$  とする.  $\sigma^2$  を既知として次の片側検定問題を考える.

$$H_0 : \beta = c \quad \text{vs} \quad H_1 : \beta > c$$

(a)  $b$  の分布を求めなさい.

(b) 検定統計量を与えなさい.

(c) 検定統計量の  $H_0$  の下での分布を与えなさい.

(d) 有意水準 5% の検定の棄却域を定めなさい.

(e) 検定統計量の値が 2.0 のとき p 値を求めなさい.

解答例

1. (a)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

(b)

$$\begin{aligned} E(b) &= E\left(\beta + \frac{\sum_{i=1}^n x_i u_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right) \\ &= \beta + \frac{\sum_{i=1}^n x_i E(u_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\ &= \beta \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \text{var}(b) &= \text{var}\left(\beta + \frac{\sum_{i=1}^n x_i u_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right) \\ &= \text{var}\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i u_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right) \\ &= \frac{\text{var}(x_1 u_1) + \cdots + \text{var}(x_n u_n)}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^2} \\ &= \frac{x_1^2 \text{var}(u_1) + \cdots + x_n^2 \text{var}(u_n)}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^2} \\ &= \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^2} \\ &= \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \end{aligned}$$

2. (a)

$$b \sim N\left(\beta, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right)$$

(b)

$$Z := \frac{b - c}{\sqrt{\sigma^2 / \sum_{i=1}^n x_i^2}}$$

(c)  $H_0$  の下で

$$Z \sim N(0, 1)$$

(d) 標準正規分布表より  $H_0$  の下で

$$\Pr[Z \geq 1.65] = .05$$

したがって棄却域は  $[1.65, \infty)$ .

(e) 標準正規分布表より

$$\Pr[Z \geq 2.00] = .02275$$

したがって p 値 = .02275.