第 10 回　代表的な連続分布

村澤 康友

2018 年 6 月 19 日

今日のポイント

1. pdf の値が均一な分布を一様分布という．
2. ポアソン分布にしがたう現象が初めて起こるまでの待ち時間の分布を指数分布という．
3. 測定誤差は正規分布にしたがう．正規分布の線形変換も正規分布であり，標準化した正規分布を標準正規分布という．正規分布の cdf は積分を含むので，標準正規分布表を用いて確率を計算する．

目次

1　一様分布　1

2　指数分布　3

3　正規分布　3

4　ガンマ分布　6

5　ベータ分布　7

1　一様分布

定義 1. $[a, b]$ 上の**一様分布**の pdf は

$$f(x) := \begin{cases} 1/(b-a) & \text{for } x \in [a, b] \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

注 1. $\mathrm{U}[a, b]$ と書く．

注 2. cdf は

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < a \\ (x-a)/(b-a) & \text{for } x \in [a, b] \\ 1 & \text{for } x > b \end{cases}$$

例 1. ルーレット．

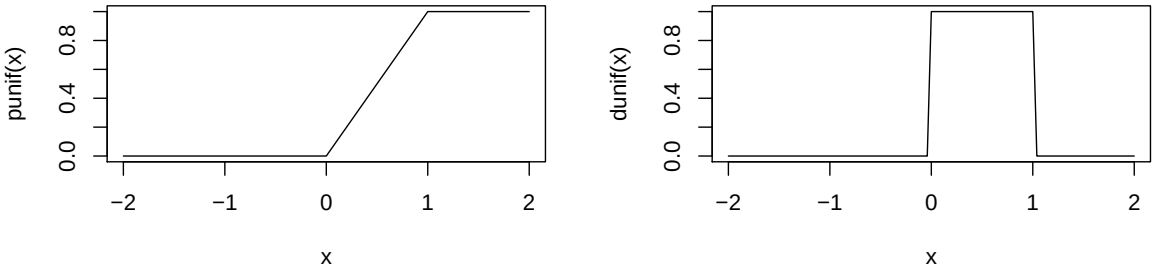

図 1　U[0, 1] の cdf と pdf

例 2. U[0, 1] の cdf と pdf は図 1 の通り.

定理 1. $U \sim \mathrm{U}[a, b]$ なら

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(U) &= \frac{a+b}{2} \\ \mathrm{var}(U) &= \frac{(a-b)^2}{12}\end{aligned}$$

証明. 平均は

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(U) &:= \int_{-\infty}^{a} u \cdot 0 \,\mathrm{d}u + \int_{a}^{b} u \cdot \frac{1}{b-a} \,\mathrm{d}u + \int_{b}^{\infty} u \cdot 0 \,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{b-a}\left[\frac{u^2}{2}\right]_a^b \\ &= \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} \\ &= \frac{a+b}{2}\end{aligned}$$

2 次の積率は

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(U^2\right) &:= \int_{-\infty}^{a} u^2 \cdot 0 \,\mathrm{d}u + \int_{a}^{b} u^2 \cdot \frac{1}{b-a} \,\mathrm{d}u + \int_{b}^{\infty} u^2 \cdot 0 \,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{b-a}\left[\frac{u^3}{3}\right]_a^b \\ &= \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} \\ &= \frac{a^2+ab+b^2}{3}\end{aligned}$$

分散は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{var}(U) &= \mathrm{E}\left(U^2\right) - \mathrm{E}(U)^2 \\
&= \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\
&= \frac{4a^2+4ab+4b^2}{12} - \frac{3a^2+6ab+3b^2}{12} \\
&= \frac{(a-b)^2}{12}
\end{aligned}
$$

□

2 指数分布

単位時間当たりの成功回数の分布を $\mathrm{Poi}(\lambda)$ とする．y 時間での成功回数を X とすると $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda y)$．初成功までの待ち時間を Y とすると

$$
\begin{aligned}
\Pr[Y \le y] &= 1 - \Pr[Y > y] \\
&= 1 - \Pr[X = 0] \\
&= 1 - f_X(0) \\
&= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda y}
\end{aligned}
$$

定義 2. 指数分布の cdf は

$$
F(x) := \begin{cases} 0 & \text{for } x \le 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{for } x > 0 \end{cases}
$$

注 3. $\mathrm{Exp}(\lambda)$ と書く．

注 4. pdf は

$$
f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \le 0 \\ \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{for } x > 0 \end{cases}
$$

例 3. $\mathrm{Exp}(1)$ の cdf と pdf は図 2 の通り．

定理 2. $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ なら

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \frac{1}{\lambda} \\
\mathrm{var}(X) &= \frac{1}{\lambda^2}
\end{aligned}
$$

証明．mgf を用いるのが簡単．詳細は略． □

3 正規分布

定義 3. 正規（ガウス）分布の pdf は

$$
f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)
$$

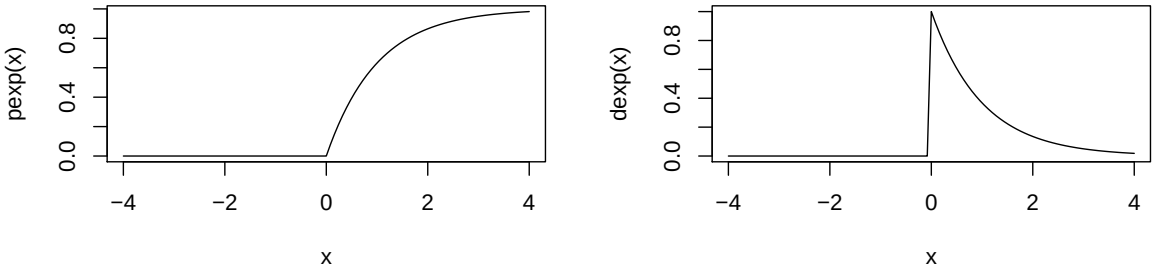

図 2　Exp(1) の cdf と pdf

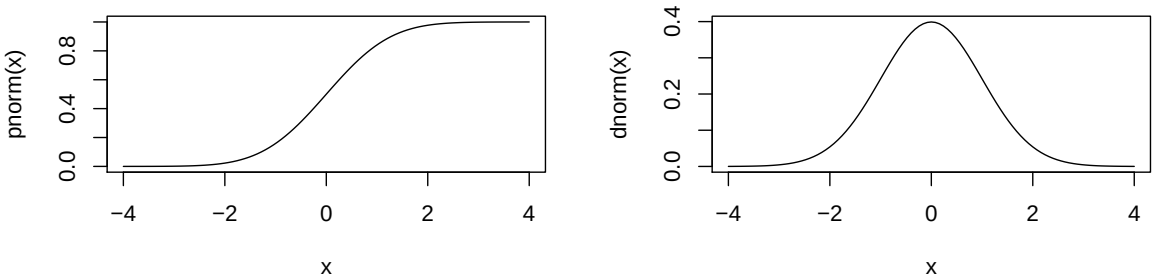

図 3　N(0, 1) の cdf と pdf

注 5. $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ と書く.

例 4. 測定誤差，標本平均（中心極限定理）.

定義 4. $\mathrm{N}(0,1)$ を**標準正規分布**という.

注 6. $\mathrm{N}(0,1)$ の cdf を $\Phi(.)$，pdf を $\phi(.)$ で表す.

例 5. $\mathrm{N}(0,1)$ の cdf と pdf は図 3 の通り.

定理 3. $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ の *mgf* は

$$M(t) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

証明. $X \sim \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ とすると

$$
\begin{aligned}
M(t) &:= \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(tx - \frac{x^2 - 2\mu x + \mu^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2 - 2\mu x - 2\sigma^2 tx + \mu^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\left[x - \left(\mu + \sigma^2 t\right)\right]^2 - 2\mu\sigma^2 t - \sigma^4 t^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\left[x - \left(\mu + \sigma^2 t\right)\right]^2}{2\sigma^2} + \mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{x - \left(\mu + \sigma^2 t\right)}{\sigma}\right]^2\right) \mathrm{d}x \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)
\end{aligned}
$$

$\mathrm{N}\left(\mu + \sigma^2 t, \sigma^2\right)$ の pdf の積分は 1. □

系 1. $X \sim \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ なら

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \mu \\
\mathrm{var}(X) &= \sigma^2
\end{aligned}
$$

証明. mgf を微分すると

$$
\begin{aligned}
M_X'(t) &= \left(\mu + \sigma^2 t\right) \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \\
M_X''(t) &= \sigma^2 \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) + \left(\mu + \sigma^2 t\right)^2 \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= M_X'(0) \\
&= \mu \\
\mathrm{E}\left(X^2\right) &= M_X''(0) \\
&= \sigma^2 + \mu^2 \\
\mathrm{var}(X) &= \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2 \\
&= \sigma^2
\end{aligned}
$$

□

定理 4. $X \sim \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ なら

$$
aX + b \sim \mathrm{N}\left(a\mu + b, a^2\sigma^2\right)
$$

証明. $aX+b$ の mgf は

$$\begin{aligned}
M_{aX+b}(t) &:= \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{t(aX+b)}\right) \\
&= \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{atX}\right)\mathrm{e}^{bt} \\
&= M_X(at)\mathrm{e}^{bt} \\
&= \exp\left(\mu(at) + \frac{\sigma^2(at)^2}{2}\right)\mathrm{e}^{bt} \\
&= \exp\left((a\mu+b)t + \frac{a^2\sigma^2t^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

これは $\mathrm{N}\left(a\mu+b, a^2\sigma^2\right)$ の mgf. □

系 2. $X \sim \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ なら

$$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

証明. 前の定理で $a := 1/\sigma$，$b := -\mu/\sigma$ とする. □

注 7. したがって X の累積確率は標準正規分布表から求まる.

$$\begin{aligned}
F_X(x) &:= \Pr[X \le x] \\
&= \Pr\left[\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right] \\
&= \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)
\end{aligned}$$

例 6. $X \sim \mathrm{N}(1,9)$ について $\Pr[X \le 2]$ を求める. $(X-1)/3 \sim \mathrm{N}(0,1)$ より

$$\begin{aligned}
\Pr[X \le 2] &= \Pr\left[\frac{X-1}{3} \le \frac{2-1}{3}\right] \\
&= \Phi\left(\frac{1}{3}\right) \\
&= 1 - .3707 \\
&= .6293
\end{aligned}$$

4 ガンマ分布

定義 5. ガンマ関数は，任意の $\alpha > 0$ について

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

定理 5. 任意の $\alpha > 0$ について

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$$

証明. 部分積分より

$$
\begin{aligned}
\Gamma(\alpha) &:= \int_0^\infty x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^\alpha}{\alpha}\mathrm{e}^{-x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{x^\alpha}{\alpha}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\alpha}\left[x^\alpha \mathrm{e}^{-x}\right]_0^\infty + \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty x^\alpha \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\alpha}\Gamma(\alpha+1)
\end{aligned}
$$

□

注 8. α が自然数なら $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$.

定義 6. ガンマ分布の pdf は

$$
f(x) := \begin{cases} 0 & \text{for } x \le 0 \\ \lambda(\lambda x)^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}/\Gamma(\alpha) & \text{for } x > 0 \end{cases}
$$

注 9. $\mathrm{Gam}(\alpha, \lambda)$ と書く.

注 10. $\mathrm{Gam}(1, \lambda)$ は $\mathrm{Exp}(\lambda)$.

例 7. n 回成功までの待ち時間.

5 ベータ分布

定義 7. ベータ関数は，任意の $\alpha, \beta > 0$ について

$$
B(\alpha, \beta) := \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,\mathrm{d}x
$$

定義 8. ベータ分布の pdf は

$$
f(x) := \begin{cases} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}/B(\alpha,\beta) & \text{for } x \in [0,1] \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}
$$

注 11. $\mathrm{Beta}(\alpha, \beta)$ と書く.

注 12. $\mathrm{Beta}(1, 1)$ は $\mathrm{U}[0, 1]$.