2018年5月8日

# 第5回　条件つき確率と事象の独立性（4.5）

村澤 康友

# 前回のキーワード

試行，標本点，標本空間，事象（空事象，全事象，根元事象，和事象，積事象，排反事象，余事象），集合算の法則（交換法則，結合法則，分配法則，ド・モルガンの法則），確率の公理，$\sigma$ 加法性，加法定理

# 今日のポイント

1. $B$が起こったという条件の下での$A$の条件つき確率は$P(A|B) := P(A \cap B)/P(B)$.
2. $P(A|B) = P(A)$なら$A$と$B$は独立という．$P(A \cap B) = P(A)P(B)$で定義してもよい.
3. 条件つき確率の定義からベイズの定理が導ける.

# 目次


1 条件つき確率（p. 81） 4

2 事象の独立性（p. 83） 10

3 ベイズの定理 16

# 1　条件つき確率（p. 81）

ある試行における事象を $A, B$ とする.

定義 **1.** $B$ が起こったという条件の下での $A$ の条件つき確率は

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

注：$B$ を標本空間とみなしたときの $A \cap B$ の確率.

# 例：サイコロ

3以下の目が出る事象を $A$，偶数の目が出る事象を $B$ とする．すなわち

$$A := \{1, 2, 3\}, \quad B := \{2, 4, 6\}, \quad A \cap B = \{2\}$$

偶数の目が出たという条件の下で，3以下の目が出る条件つき確率は

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$$

# 例：つぼの中の玉（p. 81）

(1) または (2) と書かれた2色の玉が，つぼの中に6つ入っている．

| 種類 | 個数 |
|---|---|
| (1) の白玉 | 2 |
| (1) の黒玉 | 1 |
| (2) の白玉 | 1 |
| (2) の黒玉 | 2 |
| 計 | 6 |

つぼの中から玉を1つ取り出す試行を考える．

(1)の玉を取り出す事象を$A$，白玉を取り出す事象を$B$とする．

(1)の玉を取り出す確率は

$$P(A) = \frac{3}{6}$$

白玉を取り出す確率は

$$P(B) = \frac{3}{6}$$

白玉が取り出されたという条件の下で，(1)の玉を取り出す条件つき確率は

$$
\begin{aligned}
P(A|B) &:= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\
&= \frac{2/6}{3/6} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

# 乗法定理（p. 82）

定理 **1.**

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

証明：条件つき確率の定義より明らか.

注：同様に

$$P(B \cap A) = P(B|A)P(A)$$

# 2　事象の独立性（p. 83）

定義 **2.** $P(A|B) = P(A)$ なら $A$ と $B$ は独立という.

注：条件つき確率の定義より，独立性の定義は

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

すなわち

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

# 独立性の意味

$B$ において $A \cap B$ が起こる確率と，$\Omega$ において $A$ が起こる確率が等しい.

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A) = \frac{P(A)}{P(\Omega)}$$

そのため $B$ が起こったという情報が，$A$ が起こる確率に影響しない.

# 例：つぼの中の玉（p. 82）

(1) または (2) と書かれた2色の玉が，つぼの中に8つ入っている．

| 種類 | 個数 |
|---|---|
| (1) の白玉 | 2 |
| (1) の黒玉 | 2 |
| (2) の白玉 | 2 |
| (2) の黒玉 | 2 |
| 計 | 8 |

つぼの中から玉を1つ取り出す試行を考える．

(1)の玉を取り出す事象を$A$，白玉を取り出す事象を$B$とする．
(1)の玉を取り出す確率は

$$P(A) = \frac{4}{8}$$

白玉を取り出す確率は

$$P(B) = \frac{4}{8}$$

白玉が取り出されたという条件の下で，(1)の玉を取り出す条件つき確率は

$$
\begin{aligned}
P(A|B) &:= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\
&= \frac{2/8}{4/8} \\
&= \frac{2}{4}
\end{aligned}
$$

# 3つの事象の独立性（p. 83）

定義 **3.** 以下が成り立つとき $A, B, C$ は（互いに）独立という.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$
$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$
$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

注：4つ以上の事象についても同様.

# 3　ベイズの定理

## 原因の確率（p. 84）

$\Omega$の分割を$B_1, \ldots, B_n$とする．すなわち

$$B_1 \cup \cdots \cup B_n = \Omega$$

$$B_i \cap B_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

$B_1, \ldots, B_n$（原因）は異なる確率で事象$A$（結果）をもたらす．$A$が起こったという条件の下で，$B_1, \ldots, B_n$の条件つき確率を求める．

# 事前確率と事後確率（p. 84）

定義 **4.** $P(B_i)$ を $B_i$ の事前確率という.

定義 **5.** $P(B_i|A)$ を $B_i$ の事後確率という.

注：乗法定理より

$$P(B_i|A)P(A) = P(A|B_i)P(B_i)$$

すなわち

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)}$$

# 全確率の定理（p. 84）

定理 **2.** $B_1, \ldots, B_n$ が $\Omega$ の分割なら

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

証明：$B_1, \ldots, B_n$ が排反だから $A \cap B_1, \ldots, A \cap B_n$ も排反.
したがって

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A \cap \Omega) \\
&= P(A \cap (B_1 \cup \cdots \cup B_n)) \\
&= P((A \cap B_1) \cup \cdots \cup (A \cap B_n)) \\
&= P(A \cap B_1) + \cdots + P(A \cap B_n) \\
&= P(A|B_1)P(B_1) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)
\end{aligned}
$$

# ベイズの定理（p. 84）

定理 **3.**

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}$$

証明：乗法定理と全確率の定理より

$$\begin{aligned} P(B_i|A) &:= \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)} \end{aligned}$$

# 例：ガンの診断（p. 86）

ガンと診断される事象を $A$，実際にガンである事象を $B$ とする．
以下の確率が分かっている．

$$P(B) = .005$$
$$P(A|B) = .95$$
$$P(A^c|B^c) = .95$$

ガンと診断されたとき本当にガンである確率を求める．

ベイズの定理より

$$
\begin{aligned}
P(B|A) &= \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)} \\
&= \frac{0.95 \times 0.005}{0.95 \times 0.005 + 0.05 \times 0.995} \\
&\approx 0.0872
\end{aligned}
$$

本当にガンである確率は10％以下！（ただし数値例はフィクションです.）

注：1000人当たりの頻度で考えると分かりやすい.

# 例：モンティ・ホール問題

- 3つのドアの1つは「当たり」，2つは「はずれ」.
- 挑戦者が1つを選択した後，司会者は残り2つから「はずれ」の方を開けて見せる（どちらも「はずれ」ならどちらかをランダムに選ぶ）.

ここで挑戦者はドアを変更してもよい．挑戦者はドアを変更すべきか？

正解は「変更すべき」.
（解説）挑戦者がドアＡを選び，司会者がドアＢを開けたとする.
以下の通り事象を定義する.

- 事象Ａ：ドアＡが当たり
- 事象Ｂ：ドアＢが当たり
- 事象Ｃ：ドアＣが当たり
- 事象ｂ：司会者がドアＢを開ける

このとき

$$
\begin{aligned}
P(A|b) &:= \frac{P(A \cap b)}{P(b)} \\
&= \frac{P(b|A)P(A)}{P(b|A)P(A) + P(b|B)P(B) + P(b|C)P(C)} \\
&= \frac{(1/2)(1/3)}{(1/2)(1/3) + 0 + 1/3} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

すなわち $A$ と $b$ は独立.

また

$$
\begin{aligned}
P(C|b) &:= \frac{P(C \cap b)}{P(b)} \\
&= \frac{P(b|C)P(C)}{P(b|A)P(A) + P(b|B)P(B) + P(b|C)P(C)} \\
&= \frac{1/3}{(1/2)(1/3) + 0 + 1/3} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

したがって$C$と$b$は独立でない.

# 例：3囚人問題

- 3人の囚人A, B, Cがいる.
- 全員処刑の予定が1人だけ恩赦となった．誰が恩赦か囚人たちはまだ知らない.
- 結果を知っている看守に対し，囚人Aが「BとCのどちらかは必ず処刑なのだから，処刑される1人の名前を教えても，私に情報を与えることにはならないだろう．1人を教えてくれないか」と頼んだ.
- 看守は納得して「囚人Bは処刑される」と教えてやった.
- 囚人Aは自分が恩赦の確率が$1/2$になったと喜んだ.

囚人Aの認識は正しいか？

正解は「基本的に間違い」.

（解説）以下の通り事象を定義する.

- 事象Ａ：囚人Ａが恩赦
- 事象Ｂ：囚人Ｂが恩赦
- 事象Ｃ：囚人Ｃが恩赦
- 事象Ｓ：看守が「囚人Ｂは処刑」と言う

このとき

$$P(A|S) := \frac{P(A \cap S)}{P(S)}$$

$$= \frac{P(S|A)P(A)}{P(S|A)P(A) + P(S|B)P(B) + P(S|C)P(C)}$$

$P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$なら（違うかもしれない）

$$P(A|S) = \frac{P(S|A)(1/3)}{P(S|A)(1/3) + 0 + 1/3}$$
$$= \frac{P(S|A)}{P(S|A) + 1}$$

$P(S|A) = 1/2$なら（違うかもしれない）

$$P(A|S) = \frac{1/2}{1/2 + 1} = \frac{1}{3}$$

したがって（追加的な仮定の下で）$A$と$S$は独立.

# 今日のキーワード

条件つき確率，乗法定理，独立性（2つの事象，3つの事象），
事前確率，事後確率，全確率の定理，ベイズの定理

# 次回までの準備

復習　教科書第４章５節

予習　教科書第５章１節