経済統計 I：期末試験

村澤 康友

提出期限：2020 年 8 月 7 日 (金) 17 時 00 分
提出場所：B1 棟「現シス・経済支援室」前の廊下のレポート BOX

注意：指定の解答用紙をダウンロードして使用すること（裏面使用可）．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと．計算には計算機を使用してよい．何を参照してもよいが，**決して他人と相談しないこと**．

1. （20 点）以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）．
   （a）負の 2 項分布
   （b）共分散
   （c）条件付き確率密度関数
   （d）（確率変数の）独立性
2. （30 点）$X \sim \mathrm{N}(0,1)$ と $Y \sim \mathrm{N}(2,3)$ は独立とし，$U := 2X + 2Y$，$V := 2X - 2Y$ とする．以下の問いに答えなさい．
   （a）U, V の分布をそれぞれ求めなさい．
   （b）U と V の共分散と相関係数を求めなさい．
   （c）$\Pr[1 < U \leq 2]$ と $\Pr[|V| \geq 3]$ を求めなさい．
3. （50 点）$X \sim \mathrm{Bin}(3, 0.5)$ とし，次の確率変数を定義する．

$$D := \begin{cases} 1 & \text{if } X > 0 \\ 0 & \text{if } X \leq 0 \end{cases}$$

   以下の問いに答えなさい．
   （a）X の確率質量関数を求め，式とグラフで表しなさい．
   （b）(X, D) の同時確率質量関数を求め，表で表しなさい．
   （c）$D = 1$ のときの X の条件付き確率質量関数を求め，式とグラフで表しなさい．
   （d）$D = 1$ のときの X の条件付き期待値を求めなさい．
   （e）$D = 1$ のときの X の条件付き分散を求めなさい．

解答例

1. 確率・統計の基本用語
   (a) 独立かつ同一なベルヌーイ試行における r 回成功までの失敗回数の分布.
      - pmf で定義してもよい.
   (b) $\mathrm{cov}(X,Y) := \mathrm{E}((X-\mathrm{E}(X))(Y-\mathrm{E}(Y)))$.
      - 言葉で定義するなら「2 変量の平均からの偏差の積の平均」.
      - 出題意図とは異なるが，データの共分散の定義も今回は可とする.
      - $\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$ は定義でないので不可.
   (c) $Y=y$ が与えられたときの X の条件付き pdf は，任意の x について

$$f_{X|Y}(x|Y=y) := \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

      - pdf を書かなければダメ.
   (d) 任意の y について $f_{X|Y}(.|Y=y)=f_X(.)$ なら X と Y は独立という.
      - 事象の独立性の定義は不可.
2. 正規分布
   (a)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(U) &= \mathrm{E}(2X+2Y)\\
&= 2\,\mathrm{E}(X)+2\,\mathrm{E}(Y)\\
&= 2\cdot 0+2\cdot 2\\
&= 4\\
\mathrm{var}(U) &= \mathrm{var}(2X+2Y)\\
&= 4\,\mathrm{var}(X)+4\,\mathrm{var}(Y)\\
&= 4\cdot 1+4\cdot 3\\
&= 16\\
\mathrm{E}(V) &= \mathrm{E}(2X-2Y)\\
&= 2\,\mathrm{E}(X)-2\,\mathrm{E}(Y)\\
&= 2\cdot 0-2\cdot 2\\
&= -4\\
\mathrm{var}(V) &= \mathrm{var}(2X-2Y)\\
&= 4\,\mathrm{var}(X)+4\,\mathrm{var}(Y)\\
&= 4\cdot 1+4\cdot 3\\
&= 16
\end{aligned}$$

   正規分布の再生性より $U\sim \mathrm{N}(4,16)$，$V\sim \mathrm{N}(-4,16)$.
      - 平均各 1 点，分散各 2 点，分布各 2 点.

(b)

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cov}(U,V) &= \operatorname{cov}(2X+2Y, 2X-2Y) \\
&= 4\operatorname{cov}(X+Y, X-Y) \\
&= 4(\operatorname{cov}(X,X)+\operatorname{cov}(Y,X)-\operatorname{cov}(X,Y)-\operatorname{cov}(Y,Y)) \\
&= 4(\operatorname{var}(X)-\operatorname{var}(Y)) \\
&= 4(1-3) \\
&= -8 \\
\operatorname{corr}(U,V) &= \frac{\operatorname{cov}(U,V)}{\sqrt{\operatorname{var}(U)\operatorname{var}(V)}} \\
&= \frac{-8}{\sqrt{16\cdot 16}} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

- 各 5 点.

(c) $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ とすると

$$
\begin{aligned}
\Pr[1<U\le 2] &= \Pr\left[\frac{1-4}{4} < \frac{U-4}{4} \le \frac{2-4}{4}\right] \\
&= \Pr\left[-\frac{3}{4} < Z \le -\frac{1}{2}\right] \\
&= \Pr\left[\frac{1}{2} \le Z < \frac{3}{4}\right] \\
&= \Pr\left[Z \ge \frac{1}{2}\right] - \Pr\left[Z > \frac{3}{4}\right] \\
&= 0.30854 - 0.22663 \\
&= 0.08191 \\
\Pr[|V|\ge 3] &= \Pr[V \le -3] + \Pr[V \ge 3] \\
&= \Pr\left[\frac{V-(-4)}{4} \le \frac{-3-(-4)}{4}\right] + \Pr\left[\frac{V-(-4)}{4} \ge \frac{3-(-4)}{4}\right] \\
&= \Pr\left[Z \le \frac{1}{4}\right] + \Pr\left[Z \ge \frac{7}{4}\right] \\
&= 1 - \Pr\left[Z > \frac{1}{4}\right] + \Pr\left[Z \ge \frac{7}{4}\right] \\
&= 1 - 0.40129 + 0.040059 \\
&= 0.638769
\end{aligned}
$$

- 各 5 点.

3. 2 項分布

(a)

$$
p_X(x) = \begin{cases} 1/8 & \text{for } x = 0,3 \\ 3/8 & \text{for } x = 1,2 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}
$$

グラフは省略.

- 式・グラフ各 5 点.

（b）同時 pmf の表は

$X\backslash D$	0	1
0	1/8	0
1	0	3/8
2	0	3/8
3	0	1/8

（c）

$$p_{X|D}(x|1) = \begin{cases} 3/7 & \text{for } x = 1, 2 \\ 1/7 & \text{for } x = 3 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

グラフは省略.

- 式・グラフ各 5 点.

（d）

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X|D=1) &= 1 \cdot \frac{3}{7} + 2 \cdot \frac{3}{7} + 3 \cdot \frac{1}{7} \\ &= \frac{12}{7} \end{aligned}$$

（e）

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(X^2|D=1\right) &= 1^2 \cdot \frac{3}{7} + 2^2 \cdot \frac{3}{7} + 3^2 \cdot \frac{1}{7} \\ &= \frac{24}{7} \\ \mathrm{var}(X|D=1) &= \mathrm{E}\left(X^2|D=1\right) - \mathrm{E}(X|D=1)^2 \\ &= \frac{24}{7} - \left(\frac{12}{7}\right)^2 \\ &= \frac{168}{49} - \frac{144}{49} \\ &= \frac{24}{49} \end{aligned}$$