経済統計 I：中間試験

村澤 康友

提出期限：2020 年 7 月 6 日 (月)
提出場所：B1 棟「現シス・経済支援室」前の廊下のレポート BOX

注意：指定の解答用紙をダウンロードして使用すること（裏面使用可）．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと．計算には計算機を使用してよい．何を参照してもよいが，**決して他人と相談しないこと**．

1. （20 点）以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）．
   （a）標本
   （b）標本空間
   （c）確率変数
   （d）積率母関数
2. （30 点）ある母集団を対象に COVID-19 の PCR 検査を実施する．以下の状況を想定する．
   - 母集団において COVID-19 に感染している人の割合は π
   - 感染している場合，検査結果が陽性になる確率は p
   - 感染していない場合，検査結果が陰性になる確率は q

   検査結果が陽性の事象を A，実際に感染している事象を B とする．検査結果が陽性のとき，実際に感染している確率 $P(B|A)$ を求めたい．
   （a）$P(A)$ を π, p, q で表しなさい．
   （b）$P(B|A)$ を π, p, q で表しなさい．
   （c）$p = 0.7$，$q = 0.99$ とする．$\pi = 0.001, 0.01, 0.1$ の場合について，それぞれ $P(B|A)$ を求めなさい．
   ※小数点第 4 位を四捨五入し，小数点第 3 位に丸めること．
3. （50 点）X は次の累積分布関数をもつ．

$$F_X(x) := \begin{cases} 0 & \text{for } x \leq 1 \\ 1 - 1/x & \text{for } x > 1 \end{cases}$$

   $Y := 1/X$ とする．
   （a）$\Pr[X > 3]$ を求めなさい．
   （b）X の確率密度関数を求め，式とグラフで表しなさい．
   （c）Y の累積分布関数を求め，式とグラフで表しなさい．
   （d）Y の確率密度関数を求め，式とグラフで表しなさい．
   （e）Y の平均と分散を求めなさい．

解答例

1. 確率・統計の基本用語
   (a) 母集団のうち実際に観察される部分.
       - 「母集団のうち」「観察される」がなければ 0 点.
   (b) 標本点全体の集合.
       - 「確率が定義される基礎となる集合」は定義でないので 0 点.
   (c) 試行の結果によって値が決まる変数.
   (d) $M_X(t) := \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right)$.
       - 「積率を生成する関数」は定義でないので 0 点.
2. ベイズの定理
   (a) 全確率の定理より

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \\ &= P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c) \\ &= p\pi + (1-q)(1-\pi) \end{aligned}$$

   (b) ベイズの定理より

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{p\pi}{p\pi + (1-q)(1-\pi)} \end{aligned}$$

   (c) 前問の結果に代入して計算すると
       - $\pi = 0.001 \Longrightarrow P(B|A) \approx 0.065$
       - $\pi = 0.01 \Longrightarrow P(B|A) \approx 0.414$
       - $\pi = 0.1 \Longrightarrow P(B|A) \approx 0.886$
3. 1 変量分布の例
   (a)

$$\begin{aligned} \Pr[X > 3] &= 1 - \Pr[X \leq 3] \\ &= 1 - F_X(3) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

   (b) 任意の $x > 1$ について

$$\begin{aligned} f_X(x) &= F'_X(x) \\ &= x^{-2} \end{aligned}$$

   したがって任意の $x \in \mathbb{R}$ について

$$f_X(x) := \begin{cases} 0 & \text{for } x \leq 1 \\ 1/x^2 & \text{for } x > 1 \end{cases}$$

   グラフは省略.

(c) $X > 1$ より $0 < Y < 1$. 任意の $y > 0$ について

$$\begin{aligned} F_Y(y) &:= \Pr[Y \le y] \\ &= \Pr\left[\frac{1}{X} \le y\right] \\ &= \Pr\left[X \ge \frac{1}{y}\right] \\ &= 1 - \Pr\left[X < \frac{1}{y}\right] \\ &= 1 - F_X\left(\frac{1}{y}\right) \\ &= \begin{cases} 1 - 0 & \text{for } 1/y \le 1 \\ 1 - [1 - 1/(1/y)] & \text{for } 1/y > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{for } y \ge 1 \\ y & \text{for } y < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

したがって任意の $y \in \mathbb{R}$ について

$$F_Y(y) := \begin{cases} 0 & \text{for } y \le 0 \\ y & \text{for } y \in (0,1) \\ 1 & \text{for } y \ge 1 \end{cases}$$

グラフは省略.

(d) 任意の $y \in (0,1)$ について

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= F'_Y(y) \\ &= 1 \end{aligned}$$

したがって任意の $y \in \mathbb{R}$ について

$$f_Y(y) := \begin{cases} 1 & \text{for } y \in (0,1) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

グラフは省略.

(e)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y) &= \int_0^1 y \,\mathrm{d}y \\
&= \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} \\
\mathrm{E}\left(Y^2\right) &= \int_0^1 y^2 \,\mathrm{d}y \\
&= \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3} \\
\mathrm{var}(Y) &= \mathrm{E}\left(Y^2\right) - \mathrm{E}(Y)^2 \\
&= \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{12}
\end{aligned}
$$